Краткие сообщения по физике № 10 1977

УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ НА АСИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ ЛИНИИ.2

К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас

УДК 621.375.823

В работе исследуется точное характеристическое уравнение, определяющее устойчивость генерации на неоднородно уширенной линии произвольной формы.

В предыдущей статье /I/ устойчивость генерации контролируемой асимметричной неоднородно уширенной линии ядерного магнитного резонанса исследована методом моментов; форм-функция, характеризующая неоднородное уширение, непрерывная или кусочно непрерывная в реальных условиях, заменялась набором дельта-функций Дирака. В области сильных радиочастотных полей метод моментов дает асимптотически точные результаты. В более слабых полях, у порога самовозбуждения, радиочастотное поле вызывает переориентацию ядерных моментов только в небольшой части вещества, в которой резонансные частоты близки к частоте генерации; модель, представляющая неоднородное уширение дискретным набором частот, в этом случае уже не удовлетворительна. В настоящей статье рассмотрено точное характеристическое уравнение.

Мы используем безразмерные обозначения предыдущей статьи. Компоненты вектора ядерной намагниченности представим как суммы стационарных значений и малых возмущений $p = p_0 + p_1, \ldots$, средние с весом, определяемым форм-функцией $g(h;\delta)$, будем обозначать $\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_1, \ldots$. В этих обозначениях из точных уравнений, приведенных в /I/, получим линеаризованную систему для малых возмущений:

$$\frac{dp_1}{dt} + p_1 - (h - \nu)q_1 - sr_1 - sr_0\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = 0,$$

$$\frac{dq_1}{dt} + q_1 + (h - \nu)p_1 \quad - sr_0\,\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_0} = 0,$$
$$\frac{dr_1}{dt} + r_1 + sp_1 + sp_0\,\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} + sq_0\,\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_0} = 0. \qquad (I)$$

Здесь h – расстройка локальной резонансной частоты, ν – расстройка частоты генерации, s – напряженность радиочастотного поля, δ – параметр подобия, характерная полуширина. Уравнения (I) содержат функции параметра h и интегралы по этому параметру, но относительно переменных p_1, q_1, r_1 они являются линейными и однородными, с постоянными коэффициентами. Для исследования устойчивости мы воспользуемся формально методом вариации произвольных постоянных с тем, чтобы получить уравнения, содержащие только усредненные величины. Предполагая зависимость возмущений от времени через множитель $e^{\lambda t}$, где λ – характеристический показатель, и переходя к комплексным амплитудам, получим алгебраические уравнения, содержащие локальные P_1, Q_1 и средние $\bar{P}_1$, $\bar{Q}_1$ значения амплитуд. Разрешая эти уравнения относительно P_1, Q_1 и усредняя правые и левые части полученных выражений с весом $g(h)$, получим систему уравнений

$$A_{11}\bar{P}_1 + A_{12}\bar{Q}_1 = 0,$$
$$A_{21}\bar{P}_1 + A_{22}\bar{Q}_1 = 0, \qquad (2)$$

где $A_{11}, \ldots, A_{22}$ – интегралы, содержащие форм-функцию $g(h)$ как весовую функцию. Характеристическое уравнение, определяющее устойчивость стационарного решения, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + [1 - (h - \nu)^2]\lambda + 2s^2}{D}\, g(h)dh \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + [2 - (h - \nu)^2]\lambda + 1 + s^2 - (h - \nu)^2}{D}\, g(h)dh + (\lambda + 2) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + [1 - (h - \nu)^2]\lambda + 2s^2}{D}\,(h - \nu)g(h)dh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h - \nu)g(h)dh}{D} = 0, \qquad (3)$$

где $D = \left[1 + s^2 + (h - \nu)^2\right]\left[\lambda^2 + 2\lambda + 1 + s^2 + (h - \nu)^2\right]$.
Для четных форм-функций уравнение (3) переходит в рассмотренное ранее /2/.

Исследование уравнения (3) проводилось численными методами, граница области устойчивости в плоскости параметров s^2, δ^2 находилась путем подстановки в уравнение чисто мнимого значения характеристического показателя $\lambda = i\omega$. В отличие от вычислений, в которых используются критерии Гурвица /I/, в этом случае решаются совместно два уравнения, содержащие величины s^2, δ^2, ω^2. Частота стационарной генерации (параметр ν) для каждой пары значений s^2, δ^2 определяется как решение уравнения $\bar{q}_0 = 0$. Трудностей с отнесением областей, лежащих по обе стороны от кривой $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, не возникает, так как в предельном случае однородного уширения ($\delta = 0$) стационарные решения всегда устойчивы.

При проведении численных вычислений может быть использован метод моментов. Подставляя в уравнение (3) приближенную форм-функцию, построенную из n дельта-функций, получаем, минуя громоздкий процесс составления уравнений в моментах, приближенное алгебраическое характеристическое уравнение для исходной форм-функции. Параметры приближенной форм-функции, то есть узлы и веса в соответствующих квадратурах, выражаются через моменты m_0, m_1, ... форм-функции $g(h)$ /3/. Узлы x_i совпадают с корнями уравнения

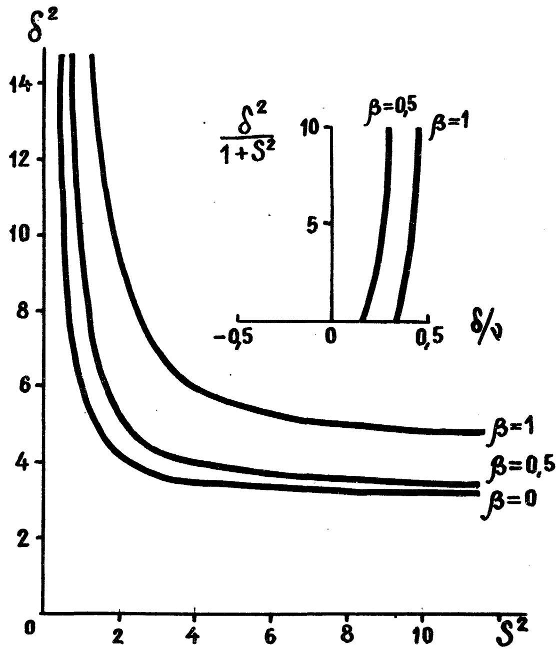
$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & & x^n \end{vmatrix} = 0,$$

веса α_i определяются системой уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^k = m_k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Наряду с методом моментов применялись обычные формулы численного интегрирования.

После нахождения значений s^2, δ^2, ω^2, соответствующих границе области устойчивости, соотношение между величинами $\bar{P}_1$, $\bar{Q}_1$



Р и с. I. Частота генерации и границы области устойчивости для форм-функции (4)

находится путем вычисления коэффициентов одного из уравнений (2). Рассмотренные уравнения соответствуют добротности резонатора, малой по сравнению с добротностью линии, поэтому величины $\bar{P}_1$, $\bar{Q}_1$ непосредственно характеризуют возмущение поля в резонаторе.

Общие качественные результаты исследования конкретных асимметричных форм-функций близки к тому, что было получено в работе /I/ для простейшего примера - раздвоенной линии. Асимметрия форм-функции нарушает изохронность колебаний, вызывает появление смешанной, амплитудной и фазовой самомодуляции на границе области устойчивости, но одновременно расширяет область устойчивости. При равной ширине линии самомодуляция генератора, стабилизированного асимметричной линией, возникает в более сильных радиочастотных полях. На рис. I приведены результаты вычислений для форм-функции

$$g(h;\,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\delta + \beta h}{2\delta^2} & |h| \leqslant \delta \\ 0 & |h| > \delta \end{cases} . \qquad (4)$$

Здесь $\beta \leqslant 1$ - параметр асимметрии.

В организации вычислений на ЭВМ авторам оказали большую помощь Е. Д. Булатов и А. И. Бардыбахин.

Поступила в редакцию
I июля 1977 г.

Литература

I. К. В. Владимирский и А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, I6 (1977).
2. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике ФИАН, № I0, 4I (I97I), № 3, 47 (1972), № 5, I9 (1973); Диссертация, Москва, 1974 г.
3. П. К. Суетин, Классические ортогональные многочлены, Наука, Москва, 1976 г; Р. В. Хемминг. Численные методы, Наука, Москва, 1968 г.