

ДИСПЕРСИЯ ФОТОНА В АСИМПТОТИЧЕСКИ СИЛЬНЫХ
МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

А. Е. Шабал

УДК 530.145

В пределе больших внешних магнитных полей рассмотрены решения уравнений дисперсии электромагнитных волн. Отмечается "одномеризация" пространства и указывается на специфические проявления трудности "нуль-заряда" в случае внешнего поля.

В постоянном и однородном внешнем магнитном поле \vec{H} имеются три собственные моды электромагнитных волн, занумерованные как 1, 2, 3 и характеризующиеся каждая своей поляризацией /1, 2, 3/. Уравнения дисперсии для них имеют вид

$$k^2 = \alpha_i(k_0, \vec{k}, \vec{H}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $k^2 = \vec{k}^2 - k_0^2$ есть квадрат 4-импульса фотона, а функции α_i вычислены в /1,4,5,6/ в однопетлевом приближении картины Фэрри во внешнем поле.

В асимптотике по H , при $[(k_{\parallel}^2 - k_0^2)/eH] \rightarrow 0$, $(m^2/eH) \rightarrow 0$, но не предполагая малости отношения (k_{\perp}^2/eH) , где k_{\parallel} и k_{\perp} суть компоненты импульса фотона вдоль и поперек внешнего поля, имеем с точностью до постоянных по H членов:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{e^2 k^2}{12\pi^2} \ln \frac{2eH}{m^2}, \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \frac{e^2 k^2}{12\pi^2} \ln \frac{2eH}{m^2} - \frac{e^3 H}{2\pi^2} \exp \left\{ - \frac{k_{\perp}^2}{2eH} \right\} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{m^2}{\sqrt{z(4m^2+z)}} \ln \frac{(-1 - \sqrt{z(4m^2+z)}z^{-1})(1 + \sqrt{z(4m^2+z)}z^{-1})}{(1 - \sqrt{z(4m^2+z)}z^{-1})(-1 + \sqrt{z(4m^2+z)}z^{-1})} \right] \quad (3)$$

В последнем выражении квадратный корень определен как однозначная функция (со значениями в верхней полушлюкости) в области

отрицательного аргумента, а фаза комплексного числа под логарифмом — так, что $\arg(+0) = 0$, $\arg(-0) = 2\pi$. Физический берег разреза устанавливается добавлением $(-i0)$ к m^2 ; $z \equiv k_{\parallel}^2 - k_0^2$. При $z = 0$ содержимое квадратной скобки в (3) исчезает.

Равенство $\varkappa_1 = \varkappa_3$ означает частичное вырождение тензора поляризации вакуума, наступающее в пределе $n \rightarrow \infty$. Моды 1 и 3 характеризуются обе тем, что вектор электрического поля \vec{e} в волне ортогонален к \vec{n} . Этим они отличаются от моды 2, в которой он либо параллелен \vec{n} (если $k_{\perp} = 0$), либо может быть сделан таковым лоренц-преобразованием вдоль \vec{n} (если $k_{\perp} \neq 0$). Моды 1 и 3 отличаются друг от друга тем, что в первой \vec{e} лежит в плоскости, содержащей векторы \vec{n} и \vec{k} , а в последней \vec{e} ортогонален к этой плоскости. Таким образом, отмеченное вырождение выражается в наступлении безразличия относительно вращений указанной плоскости \vec{n} , т.е. в установлении цилиндрической симметрии. Существование компоненты импульса k_{\perp} не может нарушить этой симметрии: направление \vec{k}_{\perp} никак не проявляется. (В работе /3/ отмечалось установление цилиндрической симметрии при конечных n , но $k_{\perp} = 0$). Также имеется безразличие относительно направления вектора магнитного поля \vec{h} в волне, так как в моде 3 он лежит в упомянутой плоскости и может составлять с \vec{n} разные углы, а в моде 1 он этой плоскости перпендикулярен.

Мода 2 имеет низший порог рождения электронно-позитронной пары при $k_0^2 - k_{\parallel}^2 = 4m^2$, соответственно этому в линейном по n члене в (3) имеется сингулярное ветвление. Все высшие пороги в моде 2, а также низший порог в модах 1 и 3 отодвинуты в нашем асимптотическом случае на бесконечность: $(k_0^2 - k_{\parallel}^2)_{\text{пор}} \sim 2en\mu$, где $\mu = 1, 2, 3, \dots$ при $n \gg m^2$.

Подставляя (2) в (1), видим, что имеется решение последнего с вакуумным законом дисперсии $k^2 = 0$. В моде 1 это решение приводит к вектор-потенциалу волны $A_{\mu} \sim k_{\mu}$, т.е. волна отсутствует. Напротив, в моде 3 — это реальная поперечная волна, движущаяся со скоростью света в вакууме по любому направлению, но всегда с \vec{e} , ортогональным плоскости (\vec{n}, \vec{k}) . Другое решение уравнения (1) носит явно фиктивный характер: при поле $n = (m^2/2e) \exp(12\pi^2/e^2) \approx 2N_{\text{сг}} \exp(3\pi \cdot 137)$, где $N_{\text{сг}} = m^2/e \approx 4 \cdot 10^{13}$ Гс, имеются волны мод 1 и 3, в которых импульс и час-

тота фотона никак не связаны друг с другом.*) Это решение происходит от того, что асимптотика (2) по полю H имеет такой же вид, что и асимптотика поляризационного оператора по (пространственно-подобному) импульсу фотона в вакууме, на что есть глубокие причины /7/. Поэтому следует считать, что здесь мы столкнулись со специфическим проявлением для случая внешнего поля известной трудности нуль-заряда /8/, которая обязана в вакууме этой асимптотике. **)

Если теперь подставить (3) в (I), получаем уравнение дисперсии для моды 2. В окрестности порога $k_0^2 - k_{||}^2 = 4m^2$ оно совпадает с изученным ранее уравнением (43) работы /3/ (см. также /2/, а подробности в /9/). Его решение, изображенное на рис. I работы /3/, для случая большого H модифицируется таким образом, что положение точки бифуркации с координатой y_2 смещается на этом рисунке вниз налево вдоль линии, имеющей наклон $1/3$ (показана пунктиром на помещаемом здесь рисунке). При этом комплексная ветвь решения на втором листе (формула (49) работы /3/) может пересечь ось $k^2 = 0$. Это происходит при $H = (16/3^{3/2})(m^2/e)(4\pi/e^2) \approx 3 \cdot 137 n_{ст}$, $4m^2 + k_{||}^2 - k_0^2 = 4m^2/3$. При дальнейшем увеличении H точка пересечения с осью поднимается вверх, достигает порога и поднимается выше его. Порог проходится при примерно вдвое большем поле $H = \frac{m^2}{e} \left(\frac{4\pi}{e^2} \right)^{1/3} \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\text{ch}3 \text{ arch}2+1}$. При этом $\text{Im}(k_0^2 - k_{||}^2) = 4m^2$, т.е.

обратное время жизни в системе покоя ($k_{||} = 0$) есть $\text{Im}k_0 = 2^{5/4} m \sin(\pi/8)$. Рассматривая асимптотику формулы (3) при $k_0^2 - k_{||}^2 \gg 4m^2$ (но все же $\ll eH$), получим решение уравнения дисперсии (I) в виде $\text{Im}(k_0^2 - k_{||}^2) = 0$, $k_0^2 - k_{||}^2 = k_1^2 + \frac{e^3 H}{2\pi^2} \times \exp\left(-\frac{k^2}{2eH}\right)$, которое продолжает решение из окрестности порога, когда последнее подходит к световому конусу $k^2 = 0$. При $H \gg n_{ст} \times 137 \cdot 2\pi$ этой формуле можно верить уже при всех $k_1^2 \gg 0$. Выше порога при $k_1^2 = 0$ решение уравнения дисперсии трактуется как

*) След этого решения при $H = k_0 = 0$ был обнаружен в /6/ (см. стр. 19).

***) На иные последствия нуль-заряда для случая магнитного поля указывалось Д. А. Киржницем.

тота фотона никак не связаны друг с другом. *) Это решение происходит от того, что асимптотика (2) по полю H имеет такой же вид, что и асимптотика поляризаационного оператора по (пространственно-подобному) импульсу фотона в вакууме, на что есть глубокие причины /7/. Поэтому следует считать, что здесь мы столкнулись со специфическим проявлением для случая внешнего поля известной трудности нуль-заряда /8/, которая обязана в вакууме этой асимптотике. **)

Если теперь подставить (3) в (1), получаем уравнение дисперсии для моды 2. В окрестности порога $k_0^2 - k_{||}^2 = 4m^2$ оно совпадает с изученным ранее уравнением (43) работы /3/ (см. также /2/, а подробности в /9/). Его решение, изображенное на рис. I работы /3/, для случая большого H модифицируется таким образом, что положение точки бифуркации с координатой y_2 смещается на этом рисунке вниз налево вдоль линии, имеющей наклон $1/3$ (показана пунктиром на помещаемом здесь рисунке). При этом комплексная ветвь решения на втором листе (формула (49) работы /3/) может пересечь ось $k^2 = 0$. Это происходит при $H = (16/3^{3/2})(m^2/e)(4\pi/e^2) \approx 3 \cdot 137 n_{cr}$, $4m^2 + k_{||}^2 - k_0^2 = 4m^2/3$. При дальнейшем увеличении H точка пересечения с осью поднимается вверх, достигает порога и поднимается выше его. Порог проходится при примерно вдвое большем поле $H = \frac{m^2}{e} \left(\frac{4\pi}{e^2} \right)^{1/2} \sqrt{3 \operatorname{arch} 2 + 1}$. При этом $\operatorname{Im}(k_0^2 - k_{||}^2) = 4m^2$, т.е.

обратное время жизни в системе покоя ($k_{||} = 0$) есть $\operatorname{Im}k_0 = 2^{5/4} m \sin(\pi/8)$.

Рассматривая асимптотику формулы (3) при $k_0^2 - k_{||}^2 \gg 4m^2$ (но все же $\ll eH$), получим решение уравнения

дисперсии (1) в виде $\operatorname{Im}(k_0^2 - k_{||}^2) = 0$, $k_0^2 - k_{||}^2 = k_1^2 + \frac{e^3 H}{2\pi^2} \times$

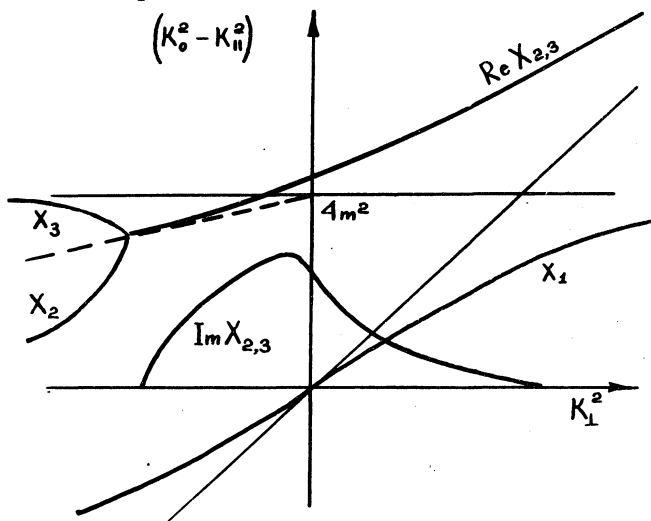
$\times \exp\left(-\frac{k_1^2}{2eH}\right)$, которое продолжает решение из окрестности порога,

когда последнее подходит к световому конусу $k^2 = 0$. При $H \gg n_{cr} \times 137 \cdot 2\pi$ этой формуле можно верить уже при всех $k_1^2 \gg 0$. Выше порога при $k_1^2 = 0$ решение уравнения дисперсии трактуется как

*) След этого решения при $\vec{k} = k_0 - 0$ был обнаружен в /6/ (см. стр. 19).

**) На иные последствия нуль-заряда для случая магнитного поля указывалось Д. А. Киржницем.

распадное состояние (стабильное при $N \gg N_{ср} \cdot 137 \cdot 2\pi$) продольно поляризованного фотона, движущегося вдоль \vec{H} , в то время как при $k_{\perp}^2 > 0$, $k_0^2 - k_{\parallel}^2 > 4m^2$ решение описывает распадное (стабильное для $k_0^2 \gg 4m^2$) состояние поперечно поляризованного



Р и с.1. Качественный ход дисперсионных кривых на первом (X_1) и втором ($X_{2,3}$) листах плоскости $k_0^2 - k_{\parallel}^2$

фотона в системе, где $k_{\parallel} = 0$. При $k_{\perp} = 0$ на существование продольного решения выше порога для достаточно больших N указывалось в работе /10/. Интересно отметить, что этот продольно поляризованный фотон остается шпуррионным решением в том смысле, что он изолирован, а не лежит на ветви, которая могла бы быть непрерывно продолжена на значения $k_{\perp} \neq 0$; дело в том, что в моде 2 значения $k_{\perp} \neq 0$ уже соответствуют поперечно поляризованной волне, а продольно поляризованные описываются модой 1, которая, как мы видели, не имеет решения, примыкающего к обсуждаемому. О другого типа продольных и поперечных чисто вещественных шпуррионных решениях я сообщал в /3/.

Соотношения (2), (3) позволяют также перенести результаты работы /6/, касающиеся характера экранирования постоянного

электромагнитного поля за счет поляризации вакуума полем n , на случай произвольно зависящих от координат и времени экранируемых полей. Для этой задачи трудность нуль-заряда приводит к такому следствию: электромагнитное поле произвольной конфигурации с $\vec{E} \perp \vec{H}$ может возникнуть при равной нулю индукции \vec{A} , когда H обращает (2) в единицу.

Поступила в редакцию
15 октября 1975 г.

Л и т е р а т у р а

1. И. А. Баталин, А. Е. Шабад. ЖЭТФ, 60, 894 (1971).
2. A. E. Shabad. Lett. Nuovo Cimento, 3, Ser 2, 457 (1972).
3. A. E. Shabad. Ann. Phys. (N.Y.), 90, 166 (1975).
4. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко. Препринт ИЯФ СО АН СССР 74-51, 1974; ЖЭТФ, 68, 405 (1975).
5. Wu-Yang Tsai, T. Erber. Phys. Rev., D10, 492 (1974).
Wu-Yang Tsai. Phys. Rev., D10, 2699 (1974).
6. P. Bakshi, R. Cover, G. Kalman. Boston College preprint(1974).
7. В. И. Ритус. ЖЭТФ (в печати).
8. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 28, 750 (1955). Л. Д. Ландау, И. Я. Пomerанчук. ДАН СССР, 102, 489 (1955).
9. А. Е. Шабад. Препринт ФИАН № 80, 1974 г.
10. R. A. Cover, G. Kalman. Phys. Rev. Lett., 33, 1115 (1974).