Краткие сообщения по физике № 6 1976

ТОЧНЫЕ ПРАВИЛА СУММ В ПРОБЛЕМЕ РАССЕЯНИЯ

Д. А. Киржниц, Н. Ж. Такибаев

УДК 530.149

Доказываются универсальные правила сумм, выражающие сумму энергий связанных состояний в данном канале реакции через интеграл по энергии от соответствующей фазы рассеяния.

1. Недавно Пафф /1/ указал правила сумм

$$\sum_n E_{nl} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dE\,\left[\delta_l(E) - \delta_l^o(E)\right], \qquad (1)$$

связывающие энергии связанных состояний E_{nl} с фазами рассеяния (точной δ и борновской δ^o) для потенциального нерелятивистского двухчастичного рассеяния.[ж)] В этой заметке показывается, что правила (1) на самом деле представляют собой частный случай общих правил сумм, доказательство которых требует выполнения лишь уравнения Шредингера. Соответственно, их область применимости далеко выходит за рамки перечисленных выше ограничений.

2. Используется следующая параметризация матрицы рассеяния

$$S_{if} = \left[\exp(2i\hat{\eta})\right]_{if}, \quad \eta_{if} = \delta_{if}\delta(E_i - E_f)/(\rho_i\rho_f)^{1/2},$$

где δ_{if} – фаза рассеяния для перехода $i \to f$, ρ – плотность уровней, определяемая соотношением

$$\sum_n(\ldots) = \sum_\nu(\ldots) + \int_0^\infty dE \sum_\xi \rho_n(\ldots), \quad n = (E,\xi),$$

ж) Сходные правила сумм, выражающие сумму обратных степеней E_{nl} через интеграл от фазы рассеяния, были еще раньше указаны авторами /2/.

ν - индекс дискретного спектра $(E<0)$, ξ - дополнительные по отношению к энергии индексы состояния. Рассматривая фазу $\delta_{if} = \delta(E)_{if}$ как матрицу в пространстве ξ (здесь и в дальнейшем индексы i, f означают ξ_i, ξ_f), легко вывести представление

$$(\hat{S} - 1)_{if} = \delta(E_i - E_f)\left[\exp(2i\hat{\delta}(E)) - 1\right]_{if} \Big/ (\rho_i \rho_f)^{1/2}, \qquad (2)$$

которое в двухчастичной центральной задаче (ξ - квантовые числа момента, δ диагонально по ξ) принимает хорошо известный вид.

3. В основу вывода правил сумм мы положим дифференциальные по константе связи g соотношения /3/. Одно из них хорошо известно

$$\frac{dE_\nu}{dg} = V_{\nu\nu}, \qquad (3)$$

где гамильтониан системы представлен в виде $H_0 + gV$. Второе соотношение следует из уравнения для матрицы рассеяния /3/

$$i\,\frac{dS_{if}}{dg} = 2\pi \sum_s S_{is} V_{sf}\,\delta(E_s - E_f).$$

Подставляя сюда (2) и учитывая формулу для дифференцирования экспоненты от оператора (см., например, /4/), находим

$$V_{if}(E_i) = \frac{i}{2\pi}\left[e^{-2i\hat{\delta}}\,\frac{d}{dg}\,e^{2i\hat{\delta}}\right]_{if} \Big/ (\rho_i\rho_f)^{1/2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 dt\,\left(e^{-it\hat{\delta}}\,\frac{d\hat{\delta}}{dg}\,e^{it\hat{\delta}}\right)_{if} \Big/ (\rho_i\rho_f)^{1/2}. \qquad (4)$$

В двухчастичной задаче (4) переходит в соотношение /3/ $V_l(E) = -\frac{1}{\pi\rho}\,\frac{d\delta_l(E)}{dg}$.

4. Искомые правила сумм получаются из условия независимости шпура оператора $\hat{V}$ от выбираемой системы функций $Sp\hat{V} = Sp^0\hat{V}$, где слева используется система точных, справа - свободных собственных функций. Использование (3), (4) и учет возможности циклической перестановки операторов под знаком шпура ведут к соотношению

$$\sum_\nu \frac{dE_\nu}{dg} = \frac{1}{\pi}\sum_\xi \int_0^\infty dE\,\frac{d}{dg}\left[\delta_{\xi\xi}(E) - \delta^0_{\xi\xi}(E)\right].$$

Его интегрирование по g с использованием нулевых граничных условий при $g = 0$ дает

$$\sum_{\nu} E_{\nu} = \frac{1}{\pi} \sum_{\xi} \int_0^{\infty} dE \left[\delta_{\xi\xi}(E) - \delta^0_{\xi\xi}(E) \right]. \tag{5}$$

5. Выделим теперь из совокупностей квантовых чисел ν и ξ множество λ, отвечающее сохраняющимся при взаимодействии величинам (например, моменту при центральном взаимодействии), обозначая $\nu = (\lambda, \alpha)$, $\xi = (\lambda, \beta)$. Рассматривая равенство $Sp(\hat{P}_{\lambda}\hat{V}) = Sp^0(\hat{P}_{\lambda}\hat{V})$, где $\hat{P}_{\lambda}$ – оператор проектирования на состояние с данным λ, получаем вместо (5) правила сумм для фиксированного значения λ

$$\sum_{\alpha} E_{\lambda\alpha} = \frac{1}{\pi} \sum_{\beta} \int_0^{\infty} dE \left[\delta_{\lambda,\beta\beta}(E) - \delta^0_{\lambda,\beta\beta}(E) \right]. \tag{6}$$

Применительно к двухчастичной центральной задаче (6) переходит в (I), а в задаче рассеяния нейтрона на дейтроне в левой части (6) стоит энергия тритона или нуль (в зависимости от спина), а в правой – сумма интегралов от фаз упругого nd-рассеяния и рассеяния трех нуклонов в три нуклона.

Поступила в редакцию
27 января 1975 г.

Литература

1. R. D. Puff. Phys. Rev. A11, 154 (1975).
2. Д. А. Киржниц, Н. Ж. Такибаев. ЯФ, I6, 253 (1972).
3. Д. А. Киржниц. ЖЭТФ, 49, 1544 (1965).; в сб. "Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма" М, "Наука", 1972 г., стр. 74.
4. Д. А. Киржниц. Полевые методы теории многих частиц. М, "Атомиздат", 1963 г. Приложение Б.