Краткие сообщения по физике № 12 1976

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, М. А. Савченко,
В. П. Силин, А. А. Чернов

УДК 533.951

Показано, что точное нелинейное решение начальной задачи для кинетического уравнения Власова эквивалентно решению системы уравнений гидродинамики холодной плазмы с определенными начальными условиями. С помощью этой системы вычислен и проанализирован нелинейный сдвиг частоты электронных ленгмюровских колебаний в широком диапазоне изменения параметров плазмы.

В настоящей работе предлагается новый подход к решению кинетического уравнения с самосогласованным полем для плазмы. В этом подходе функция распределения частиц, как это показано ниже, определяется решением системы уравнений, по форме аналогичных гидродинамическим. Такой способ оказывается в ряде случаев, и в том числе при построении нелинейной электродинамики, проще и эффективнее, чем, например, решение непосредственно кинетического уравнения Власова разложением по степеням поля.

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции распределения частиц $f(\vec{v},\vec{r},t)$ со скоростью $\vec{v}$ и координатой $\vec{r}$ в момент времени t

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (I)$$

с начальным распределением $f_0(\vec{v})$ и начальной плотностью $n_0(\vec{r})$:

$$\int d\vec{v} f_0(\vec{v}) = 1; \quad f(\vec{v},\vec{r},t=t_0) = n_0(\vec{r}) f_0(\vec{v}). \qquad (2)$$

Здесь e и m – заряд и масса частицы плазмы, а электрическое $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитное $\vec{B}(\vec{r},t)$ поля подчиняются уравнениям Максвелла с плотностью заряда ρ и плотностью тока $\vec{j}$:

$$\rho = e\int d\vec{v} f(\vec{v},\vec{r},t); \quad \vec{j} = e\int d\vec{v}\vec{v} f(\vec{v},\vec{r},t). \qquad (3)$$

В правых частях равенств (3), как обычно, подразумевается суммирование по сортам частиц.

Точное решение кинетического уравнения (I) при начальном условии (2) можно записать в виде:

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = \int d\vec{u} f_o(\vec{u}) n(\vec{u},\vec{r},t)\delta(\vec{v} - \vec{V}(\vec{u},\vec{r},t)). \qquad (4)$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой (4) в (I), если при этом принять, что величины $n(\vec{u},\vec{r},t)$ и $\vec{V}(\vec{u},\vec{r},t)$ удовлетворяют для каждого сорта частиц уравнениям

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(n\vec{V}) = 0; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\vec{V} = \frac{e}{m}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}\vec{B}]\right\}. \qquad (6)$$

При этом необходимо использовать следующие начальные условия:

$$n(\vec{u},\vec{r},t=t_o) = n_o(\vec{r}); \quad \vec{V}(\vec{u},\vec{r},t=t_o) = \vec{u}. \qquad (7)$$

Одним из способов решения уравнений (5), (6) является разложение по полю в рамках теории слабой турбулентности в приближении хаотических фаз. Такой способ применительно к нелинейной электродинамике плазмы позволяет, например, для однородной плазмы, определить влияние стационарного турбулентного шума со спектральной плотностью энергии $W(\vec{k})$ на распространение плазменных волн. Именно, согласно (5), (6) и уравнению Пуассона

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi e \int d\vec{u} f_o(\vec{u}) n(\vec{u},\vec{r},t) \qquad (8)$$

нелинейное дисперсионное уравнение плазменных волн имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\omega,\vec{k}) + \int d\vec{k}' Q(\vec{k},\vec{k}') W(\vec{k}') = 0. \qquad (9)$$

Здесь $\varepsilon(\omega,\vec{k})$ – линейная диэлектрическая проницаемость плазмы, а ядро $Q(\vec{k},\vec{k}')$ дается равенством[*)]

---

*) Выражение для ядра $Q(\vec{k},\vec{k}')$ отличается от соответствующей формулы работы /2/ учетом второго и третьего слагаемых.

$$Q(\vec{k},\vec{k}') = \frac{e^2}{4\pi^2 k^2 k'^2 m^2 \omega_{Le}^4}\left\{(\vec{k}\vec{k}')^2 (k'')^2 \left[\frac{\delta\varepsilon_e(1+\delta\varepsilon_i)}{1+\delta\varepsilon_e+\delta\varepsilon_i} - 1\right] - \frac{1+\delta\varepsilon_i}{1+\delta\varepsilon_e+\delta\varepsilon_i} \times\right.$$

$$\times\left[6\,\frac{(\vec{k}\vec{k}')^2[\vec{k}\vec{k}']^2}{k''^2} + 2(\vec{k}\vec{k}')\left|[\vec{k}\vec{k}']^2 - (\vec{k}\vec{k}')^2 - (\vec{k}\vec{k}')(k^2+k'^2)\right|\right] -$$

$$\left. - 4\,\frac{(\vec{k}\vec{k}')^2[\vec{k}\vec{k}']^2}{k''^2} - \frac{4}{3}\,\frac{[\vec{k}\vec{k}']^4}{k''^2}\right\}, \qquad (10)$$

в котором ω_{Le} – электронная ленгмюровская частота, $\omega'' \equiv \omega - \omega'$, $\vec{k}'' \equiv \vec{k} - \vec{k}'$, $\delta\varepsilon_\alpha \equiv \delta\varepsilon_\alpha(\omega'',\vec{k}'')$ – парциальная диэлектрическая проницаемость частиц сорта α.

В случае горячей плазмы при дебаевской экранировке биений ленгмюровских колебаний определяемый решением уравнения нелинейный сдвиг частоты таких колебаний отрицателен (см. формулу (13.19) в /1/ и работу /2/:

$$\delta\omega = -\frac{\omega_{Le}}{32\pi^3}\,\frac{1}{n_0 æ T_e}\,\frac{r_{De}^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2}\int d\vec{k}'\left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'}\right)^2 W(\vec{k}'). \qquad (11)$$

Здесь T_α и $r_{D\alpha} = (æT_\alpha/4\pi n_{0\alpha}e_\alpha^2)^{1/2}$ – температура и дебаевский радиус частиц сорта α, $æ$ – постоянная Больцмана. В холодной ($T_\alpha = 0$) электронной плазме нелинейный сдвиг дается соотношением

$$\delta\omega = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2 \omega_{Le}^3}\int d\vec{k}'\,\frac{[\vec{k}\vec{k}']^2}{k^2 k'^2 k''^2}\left\{(\vec{k}\vec{k}')^2 + \frac{1}{3}[\vec{k}\vec{k}']^2\right\}W(\vec{k}') \qquad (12)$$

и в одномерном случае обращается в нуль. Этот вывод подтверждается исследованием уравнений (5), (6), (8) в случае одномерного распространения ленгмюровских колебаний произвольной амплитуды (см. также /3/). В электронно-ионной плазме при одинаковых и достаточно больших фазовых скоростях v_Φ одномерно взаимодействующих волн ($v_\Phi^2 \gg v_{Te}^2$) имеем:

$$\delta\omega = \frac{15}{4}\left(\frac{e\varphi_{max}}{m_e v_\Phi^2}\right)^2\left(\frac{v_{Te}^2}{v_\Phi^2} + \frac{1}{4}\,\frac{m_e}{m_i}\left|\frac{e_i}{e}\right|\right). \qquad (13)$$

Здесь φ_{max} – амплитуда потенциала колебаний с фазовой скоростью v_Φ, $v_{Te} = (æT_e/m_e)^{1/2}$ – тепловая скорость электронов с массой m_e,

m_i – масса иона. Учет теплового движения электронов и конечной массы ионов приводит к конечному положительному значению сдвига частоты и в одномерном случае. Отметим, что в работе /4/ нелинейный сдвиг частоты плазменных волн отличается от формулы (I3) (в пределе электронной плазмы) знаком и численным коэффициентом.

В качестве второго способа решения гидродинамических уравнений (5), (6) можно указать интегрирование по характеристикам. Так, в произвольном порядке по самосогласованному полю из (5) и (6) при $\vec{B}(\vec{r},t) = 0$ имеем:

$$\vec{V}(\vec{u},\vec{r},t) = \frac{e}{m}\int_{t_0}^{t} dt'\vec{E}(\vec{R}(t',t),t'), \tag{I4}$$

$$n(\vec{u},\vec{r},t) = n_0 \exp\left\{-\frac{e}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial}{\partial\vec{R}(t',t)}\int_{t_0}^{t'} d\xi\vec{E}(\vec{R}(\xi,t'),\xi)\right\}. \tag{I5}$$

Здесь влияние поля $\vec{E}$ на траекторию частиц каждого сорта определяется решением интегрального уравнения:

$$\vec{R}(t',t) \equiv \vec{R}[t',t;\vec{u},\vec{r},\vec{E}] = \vec{r}+\vec{u}(t'-t) + \frac{e}{m}\int_{t}^{t'} d\eta\int_{t_0}^{\eta} d\xi\vec{E}(\vec{R}(\xi,t),\xi) \tag{I6}$$

Подставляя величину (I5) в (8), получим еще один вариант уравнения Пуассона:

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) =$$

$$= 4\pi e n_0\int d\vec{u} f_0(\vec{u})\exp\left\{-\frac{e}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial}{\partial\vec{R}(t',t)}\int_{t_0}^{t'} d\xi\vec{E}(\vec{R}(\xi,t'),\xi)\right\}. \tag{I7}$$

Нелинейные решения уравнений (5) и (6) при $\vec{B}(\vec{r},t) = 0$ можно получить также методом функционального среднего[ж)]:

ж) В (I8) и (I9) угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ обозначено усреднение по ансамблю статистически независимых $\langle\tau_i(t)\rho_s(t')\rangle = 0$ случайных гауссовых процессов (трехмерных векторов) с нулевыми средними значениями $\langle\vec{\tau}\rangle = \langle\vec{\rho}\rangle = 0$ и автокорреляционными функциями $\langle\tau_i(t)\tau_s(t')\rangle = -\langle\rho_i(t)\rho_s(t')\rangle = 2i\lambda\delta_{is}\delta(t-t')$ (λ – произвольная по величине размерная постоянная).

$$n(\vec{u},\vec{r},t) = \Big\langle \exp\Big\{ \frac{i}{\lambda} \int\limits_{t_o}^{t} d\eta \, \frac{\vec{\tau}(\eta)+\vec{\rho}(\eta)}{2} \times$$

$$\times \Big[\vec{u} + \frac{e}{m} \int\limits_{t_o}^{\eta} d\eta' \vec{E}\Big(\vec{r} + \int\limits_{\eta'}^{t} d\eta'' \, \frac{\vec{\tau}(\eta'')-\vec{\rho}(\eta'')}{2}, \eta' \Big) \Big] \Big\} \Big\rangle, \qquad (18)$$

$$n(\vec{u},\vec{r},t)\vec{V}(\vec{u},\vec{r},t) = \Big\langle \frac{e}{m} \int\limits_{t_o}^{t} dt' \vec{E}\Big(\vec{r} + \int\limits_{t'}^{t} d\xi \, \frac{\vec{\tau}(\xi)-\vec{\rho}(\xi)}{2}, t' \Big) \times$$

$$\times \exp\Big\{ \frac{i}{\lambda} \int\limits_{t_o}^{t} d\eta \, \frac{\vec{\tau}(\eta)+\vec{\rho}(\eta)}{2} \Big[\vec{u} + \frac{e}{m} \int\limits_{t_o}^{\eta} d\eta' \vec{E}\Big(\vec{r} + \int\limits_{\eta'}^{t} d\eta'' \, \frac{\vec{\tau}(\eta'')-\vec{\rho}(\eta'')}{2}, \eta' \Big) \Big] \Big\} \Big\rangle. \qquad (19)$$

Они же являются следствием точного решения непосредственно кинетического уравнения /5/:

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = \Big\langle f_o \Big(\vec{v} - \frac{e}{m} \int\limits_{t_o}^{t} dt' \vec{E} \Big(\vec{r} + \int\limits_{t'}^{t} d\xi \, \frac{\vec{\tau}(\xi)-\vec{\rho}(\xi)}{2}, t' \Big) \Big) \times$$

$$\times \exp\Big\{ \frac{i}{\lambda} \int\limits_{t_o}^{t} d\eta \, \frac{\vec{\tau}(\eta)+\vec{\rho}(\eta)}{2} \Big[\vec{v} + \frac{e}{m} \int\limits_{t}^{\eta} d\eta' \vec{E}\Big(\vec{r} + \int\limits_{\eta'}^{t} d\eta'' \, \frac{\vec{\tau}(\eta'')-\vec{\rho}(\eta'')}{2}, \eta' \Big) \Big] \Big\} \Big\rangle \qquad (20)$$

Заметим, что выражение (I5) находится также разложением правой части (I8) в ряд по полю $\vec{E}$ и суммированием этого ряда после функционального усреднения по гауссовским случайным функциям $\vec{\tau}$ и $\vec{\rho}$. Каждое из соотношений (I5) и (I8) для $n(\vec{u},\vec{r},t)$ возникает в результате использования различных форм записи якобиана $\det\| \partial v_i(\vec{u};t,t_o)/\partial u_j \|$, определяющего с помощью характеристик уравнения (I) преобразование элемента объема $d\vec{u}$ к элементу объема $d\vec{v}$ в интеграле по скоростям (3) в плотности заряда ρ.

Эквивалентность результатов решения кинетического уравнения с самосогласованным полем (I) традиционными методами и с помощью "гидродинамических" уравнений (5), (6) в сочетании с качественным отличием формы системы уравнений (5), (6) от (I), открывает, на наш взгляд, новый путь для построения нелинейной электродинамики плазмы.

Авторы признательны А. Г. Ситенко за обсуждение вопроса о нелинейном сдвиге частоты электронных ленгмюровских колебаний.

Поступила в редакцию
23 июля 1976 г.

Литература

I. В. В. Пустовалов, В. П. Силин. Труды ФИАН, 61, 42 (1972).
2. Л. М. Горбунов, А. Н. Тимербулатов. ЖЭТФ, 53, 1492 (1967).
3. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов. Электродинамика плазмы, Москва, "Наука", 1974 г, стр. 386.
4. Н. С. Репалов, Н. А. Хижняк, в сборнике "Высокочастотные свойства плазмы", вып. 3, Киев, "Наукова Думка", 1968 г., стр.90.
5. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, М. А. Савченко, В. П. Силин, А. А. Черников. Препринт ФИАН № 156, 1975 г.