Краткие сообщения по физике № 2 1975

СЛЕДУЮЩИЕ ЗА ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЧЛЕНЫ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

М. З. Иофа

УДК 539.124

Получено выражение для логарифмических поправок к дважды логарифмической асимптотике вершинной функции. В n порядке теории возмущений вычислены члены порядка $[\alpha\ln^2(\ldots)]^n\alpha\ln(\ldots)$.

Вычисление дважды логарифмической (д.л.) асимптотики вершинной функции в настоящее время выполнено различными методами и вошло в учебники /I/. В 2n + 1 порядке теории возмущений д.л. вклад в вершину имеет вид:

$$\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \ln^n\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right|\cdot\ln^n\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|,$$

$$t \equiv q^2 = -(p_1 - p_2)^2, \quad |q^2| \gg |p_{1,2}^2| \gg m^2 \qquad (I)$$

(для простоты выписана формула для случая фермионов вне массовой поверхности) и представляет собой сумму д.л. частей лестничных графиков (с перекрестиями фотонных линий). Д.л. асимптотика вершины представляет собой сумму знакопеременного ряда с членами (I) в области

$$\alpha\ln\left|\frac{q^2}{p_{1,2}^2}\right| \ll 1, \quad \alpha\ln^2\left|\frac{q^2}{p_{1,2}^2}\right| \leqslant 1. \qquad (2)$$

В этой области в (2n + 1) порядке теории возмущений вычислены следующие за д.л. члены (с.д.л. члены) вида $\alpha\ln(\ldots)[\alpha\ln^2(\ldots)]^{n-1}$ и найдена зависимость результата от калибровки.

Поскольку собственно-энергетические вставки дают ослабление д.л. асимптотики не менее, чем на одну степень логарифма, то с.д.л. члены могут возникнуть из (а) следующих за главными членами в лестничных графиках, (б) в лестничных графиках с одной собственно-энергетической вставкой, (в) при устранении расходимостей в расходящихся вершинных графиках.

Вклад в величину $\bar{u}_2\Lambda_\mu^{(2n+1)}u_1$ от лестничных графиков имеет вид:

$$\left(\frac{\alpha}{\pi i}\right)^n \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{P(i_1,\dots,i_n)} \bar{u}_2 \left[\prod_i^n \frac{d^4k_i}{k_i^2+i\varepsilon} \prod_{j=1}^n \gamma_\lambda^{(j)} \times \right.$$

$$\times \frac{\hat{p}_2 - \sum^j \hat{k}_r + m}{\left(p_2 - \sum^j k_r\right)^2 - m^2} \gamma_\mu \prod_{r=n}^{1} \frac{\hat{p}_1 - \sum^r \hat{k}_{i'} + m}{\left(p_1 - \sum^r k_{i'}\right)^2 - m^2} \gamma_\lambda^{(r)} u_1 \qquad (3)$$

(выражение записано в фейнмановской калибровке).

Рецептура вычисления д.л. вклада от интеграла (3) заключается в следующем /I/:

I) В числителях можно пренеоречь $\hat{k}_i$ и m; при этом

$$\bar{u}_2\gamma_{\lambda_1}\hat{p}_1\dots\hat{p}_1\gamma_\mu\hat{p}_2\dots\hat{p}_2\gamma_{\lambda_i}^{(n)}u_1 \quad u_1 \simeq t^n\bar{u}_2\gamma_\mu u_1. \qquad (4)$$

2) В переменных Судакова $(\alpha_i, \beta_i, k_\perp)$, $k_i = \alpha_i p_2 + \beta_i p_1 + k_{i\perp}$ д.л. вклад в интеграл дает область малых α_i, β_i, поэтому можно пренебречь квадратичными по α, β членами и членами $k_{i\perp}k_{j\perp}$ по сравнению с линейными по α, β членами. Интеграл в (3) при этом принимает вид

$$\int \prod \frac{d\alpha_i d\beta_i d^2k_{i\perp}}{t\alpha_i\beta_i + k_{i\perp}^2} \prod \frac{1}{p_2^2 + t\Sigma\beta_i} \prod \frac{1}{p_1^2 + t\Sigma\alpha_{im}}. \qquad (5)$$

Интегрирование по $k_{i\perp}$ дает $\theta(t\alpha_i\beta_i)$, после чего интеграл (5) с д.л. точностью можно записать в виде

$$\int_{\gamma_1\varepsilon_1}^{\varepsilon_1'} \frac{d\beta_1}{\beta_1} \int_{\beta_1\varepsilon_2}^{\varepsilon_2'} \frac{d\beta_2}{\beta_2} \dots \int_{\beta_{n-1}\varepsilon_n}^{\varepsilon_n'} \frac{d\beta_n}{\beta_n} \int_{\gamma_2\delta_1}^{\delta_1'} \frac{d\alpha_{i1}}{\alpha_{i1}} \dots \int_{\delta_n\alpha_{i\,n-1}}^{\delta_n'} \frac{d\alpha_{in}}{\alpha_{in}}, \qquad (6)$$

где $0 < \varepsilon_i, \varepsilon_i', \delta_k, \delta_k' < 1$; $\gamma_{1,2} = |p_{1,2}^2/q^2|$.

Описанный метод из-за наличия неопределенных параметров ε_i, ε_i', δ_k, δ_k' в пределах интегрирования плохо приспособлен для вычисления с.д.л. членов. Выход состоит в комбинации этого метода с прямым вычислением фейнмановского интеграла (3). Реально такое вычисление с точностью до с.д.л. членов можно провести для лестничного графика с непересекающимися ступенями. В этом случае детерминанты Чизхольма имеют простую структуру /2/. Результат вычисления состоит в том, что в случае параллельной лестницы фейнмановский интеграл с числителем (4) равен:

$$\bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \ln^n\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln^n\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\left(1+O\left(\ln^{-2}\left|\frac{q^2}{p_{1,2}^2}\right|\right)\right), \tag{7}$$

т.е. не содержит с.д.л. членов. Точный учет спинорных числителей приводит к появлению с.д.л. членов, причем с.д.л. члены возникают только от $\hat{k}_n$ и равны:

$$\bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \ln^{n-1}\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln^{n-1}\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\left(\ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| + \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\right). \tag{8}$$

В технике Судакова ответы (7), (8) возникают от интеграла типа (6), где все ε_i, ε_i', δ_k, $\delta_k' = 1$ и спинорный числитель в подинтегральном выражении (3) учтен со следующей точностью: $u_2\gamma_\mu u_1 t^{\mu}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$.

Для графиков общего вида детерминанты Чизхольма имеют сложный вид, и непосредственного доказательства того, что при $\varepsilon_i = \varepsilon_i' = \delta_k = \delta_k' = 1$ ответ, полученный в судаковской технике, совпадает с точным с точностью до членов $O(\alpha^n \ln^{2n-1}|t/r^2|)$, нет. Однако, этот факт можно проверить в низших порядках теории возмущений. Кроме того, в судаковской технике можно показать, что отбрасывание членов $k_i k_j$ в знаменателях (3) и цепочка пренебрежений (4)-(6) справедливы с точностью до с.д.л. членов. Поэтому интегралы для произвольных лестничных графиков будут вычисляться по формуле (6) с $\varepsilon_i = \varepsilon_i' = \delta_k = \delta_k' = 1$.

Вычислим с.д.л. вклад от учета членов $\hat{k}_i$ в спинорных числителях в (3). Как отмечалось, достаточно удержать степени β_n и α_{in}.

Искомое выражение имеет вид:

$$\bar{u}_2\Lambda^{(2n+1)}_{\mu(1)}u_1 =$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \left\{(n-1)!\, I_n(1,1) + (n-2)! \sum_{k,l=2}^{n} I_n(k,l)\right\}, \qquad (9)$$

где

$$I_n(i,j) = \int_{\gamma_1}^{1}\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\ldots\int_{\alpha_{n-1}}^{1}\frac{d\alpha_n}{\alpha_n}\int_{\gamma_2}^{1}\frac{d\beta_1}{\beta_1}\ldots\int_{\beta_{n-1}}^{1}\frac{d\beta_n}{\beta_n}\times$$

$$\times\left[(1-\alpha_n)^i - 1\right]\left[(1-\beta_n)^j - 1\right]. \qquad (10)$$

Вычисление дает

$$\bar{u}_2\Lambda^{(2n+1)}_{\mu(1)}u_1 = \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \frac{1}{n!}\times$$

$$\times\left[(n+1)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - n\right]\ln^{n-1}\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right|\ln^{n-1}\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\left(\ln\left|\frac{p_1^2}{q^2}\right| + \ln\left|\frac{p_2^2}{q^2}\right|\right). \qquad (11)$$

В случае фермионных концов на массовой оболочке д.л. член содержит инфракрасное обрезание. Выражения (3) с $\hat{k}$ в числителе инфракрасных расходимостей не содержат и дают:

$$\bar{u}_2\Lambda^{(2n+1)}_{\mu(1)}u_1 =$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \frac{1}{n!}\left[(n+1)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - n\right](-2)\ln^{2n-1}\left|\frac{q^2}{m^2}\right|. \qquad (12)$$

Вычислим с.д.л. вклад от фотонных вставок. Поскольку в лестничный график можно вставить одну вставку $\Pi_R^{(2)}$, то имеем:

$$\bar{u}_2\Lambda^{(2n+1)}_{\mu(2)}u_1 = \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}\bar{u}_2\gamma_\mu u_1 \frac{1}{(n-2)!}\ln^{n-2}\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right|\ln^{n-2}\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\cdot I, \qquad (13)$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{d^4k\Pi_R^{(2)}(k)}{k^2\left[(p_1 - k)^2 - m^2\right]\left[(p_2 - k)^2 - m^2\right]}. \qquad (14)$$

В случае, когда $p_{1,2}^2 \gg m^2$, интеграл (14) не содержит части $\sim\alpha^2 \ln^3 \left|q^2/p_{1,2}^2\right|$ [ж)]. Если фермионные хвосты на массовой оболочке, то

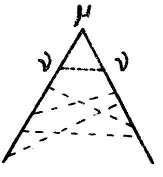
$$I = \frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{1}{3}\ln^3\left|\frac{q^2}{m^2}\right| + 2\ln^2\left|\frac{q^2}{m^2}\right|\ln\frac{m^2}{\mu^2}\right], \qquad (15)$$

и

$$\bar{u}_2\Lambda_{\mu(2)}^{(2n+1)}u_1 = \left(-\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{n-1}\bar{u}_2\gamma_\mu u_1\frac{1}{(n-2)!}\left[\ln^2\left|\frac{q^2}{m^2}\right| + \right.$$
$$\left. + 4\ln\left|\frac{q^2}{m^2}\right|\ln\frac{m}{\mu}\right]^{n-2}\cdot I. \qquad (16)$$

С.д.л. вклады от вставок $\Sigma_R^{(2)}$ в фермионные линии сокращаются с вкладами от вставок $\Lambda_{\nu R}^{(3)}$ в вершинах внутренних виртуальных фотонов. Это справедливо и для вставок высших порядков и является следствием тождества Уорда.

Обратимся к вычислению с.д.л. вкладов, возникающих при регуляризации расходящихся лестничных графиков. Расходимости вершин, куда входят виртуальные фотонные линии ("ступени" лестницы), в силу тождества Уорда сокращаются с расходимостями электронных собственно-энергетических графиков. С.д.л. вклад от регуляризованной вставки $\Sigma_R^{(2)}$ как отмечалось выше, сокращается с с.д.л. вкладом от вставок $\Lambda_{\nu R}^{(3)}$ во внутренние вершины. Поэтому достаточно рассмотреть вопрос о регуляризации лестничных графиков. Непроводимые вершинные графики расходятся логарифмически, поэтому с.д.л. вклад может появиться только от графиков вида:



(17)

ж) Предполагается, что $\left|q^2/p_{1,2}^2\right| > \left|p_{1,2}^2/m^2\right|$

Простое вычисление дает

$$\bar{u}_2 \Lambda^{(2n+1)}_{\mu(3)} u_1 =$$

$$= \left(- \frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \frac{(-1)}{(n-1)!} \ln^{n-1} \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln^{n-1} \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| . \quad (18)$$

и, если фермионные концы на массовой оболочке

$$\bar{u}_2 \Lambda^{(2n+1)}_{\mu(3)} u_1 =$$

$$= \left(- \frac{\alpha}{4\pi} \right)^n \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \frac{(-1)}{(n-1)!} \left[\ln^2 \left| \frac{q^2}{m^2} \right| + 4 \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| \ln \frac{m}{\mu} \right]^{n-1} \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| . \quad (19)$$

Рассмотрим зависимость полученных выражений от калибровки. Д.л. асимптотика вершины от выбора калибровки не зависит. С.д.л. члены уже зависят от калибровки. Для медленно меняющихся функций $d_1(k)$ для бесконечно малой градиентного преобразования /I/

$$G(p_1)\delta\Gamma_\mu(p_1,p_2)G(p_2) = \frac{\alpha}{4\pi} G(p_1)\Gamma_\mu(p_1,p_2)G(p_2) \int\limits_{-f^2}^{\infty} \delta d_1(r) \frac{d(-r^2)}{(-r^2)} . \quad (20)$$

Для функций $d_1 = \mathrm{const}$ нижний предел интеграла (20) определяется путем сравнения с непосредственным вычислением фейнмановского интеграла для вершины в третьем порядке и оказывается $-f^2 = |q^2|$. При этом для таких калибровок

$$\bar{u}_2 \Gamma_\mu(p_1, p_2, d_1) u_1 =$$

$$= \bar{u}_2 \Gamma_\mu(p_1, p_2, d^1 = 1) u_1 \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} (d_1 - 1) \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| \right), \quad (21)$$

где $\Gamma_\mu(p_1, p_2, d^1 = 1)$ – выражение для вершины в фейнмановской калибровке, вычисленное выше с с.д.л. точностью.

Таким образом, окончательно, асимптотика вершины с с.д.л. точностью дается в случае фермионных концов вне массовой оболочки суммой выражений (II) и (I8), и в случае, если фермионы на массовой поверхности, суммой (II),(I6) и (I9).

Если $\frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\left|\frac{t}{m^2}\right|\sim 1$, то $\frac{\alpha}{2\pi}\ln t\sim\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\sim 0{,}03$ - порядок с.д.л. поправки к д.л. асимптотике. Кроме того, заметим, что с.д.л. члены образуют знакопеременный ряд и не меняют качественного характера д.л. асимптотики вершинной функции.

Поступила в редакцию
27 ноября 1974 года.

Литература

1. А. И. Ахиезер, Б. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, "Наука", 1969 г. Е. М. Лившиц, Л. П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория, "Наука", 1971 г.
2. R. Chisholm. Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 300 (1952). G. Tiktopolus. Phys. Rev., 131, 480 (1963). J. C. Polkinghorne. Journ. Math. Phys., 5, 431 (1963).