Краткие сообщения по физике № 2 1975

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ

В. А. Андреев

УДК 530.145, 539.12

В работе дана теоретико-групповая интерпретация амплитуды рассеяния магнитного монополя и ее вычетов. Найдены уравнения, которым удовлетворяют эта амплитуда и вычеты.

Данная работа непосредственно примыкает к работе /1/. Как и в ней, рассмотрим 6 операторов

$$M_1 = i\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + i\mu \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right)$$

$$M_2 = -i\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} - i\mu \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\right)$$

$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$N_1 = -\cos\varphi\cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1 + i\rho)\cos\varphi\sin\theta + i\mu \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$N_2 = -\sin\varphi\cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1 + i\rho)\sin\varphi\sin\theta - i\mu \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$N_3 = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + (1 + i\rho)\cos\theta,$$

где μ – целое число.

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры O(4)

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k$$

$$[M_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k$$

$$[N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k.$$

Операторы Казимира равны

$$K_1 = M^2 + N^2 + 1 = +\mu^2 - \rho^2,$$

$$K_2 = (\vec{M}\cdot\vec{N}) = i\mu\rho.$$

В пространстве представления с такими операторами Казимира имеется базис, в котором диагонализованы операторы M_3 и M^2. Он образован функциями

$$d^m_{l,\rho\mu}(\Theta,\varphi) = (i)^{-l}\sqrt{\frac{\Gamma(l+1+i\rho)}{\Gamma(l+1-i\rho)}}\,D^l_{\mu,m}(\Theta)e^{im\varphi}. \qquad (I)$$

Можно построить еще один базис, связанный с разложением алгебры O(4) в произведение O(3)xO(3). Операторы Казимира связаны соотношением

$$K_1 = \mu^2 - \rho^2 \qquad K_2 = i\mu\rho$$

$$j_1 = \frac{1}{2}(\mu + i\rho + 1) \qquad j_2 = \frac{1}{2}(-\mu + i\rho + 1).$$

Базисные вектора имеют вид

$$\left|\frac{i\rho+1+\mu}{2};\ \frac{i\rho+1+\mu}{2} - b\right\rangle\left|\frac{i\rho+1-\mu}{2};\ -\frac{i\rho+1-\mu}{2} + a\right\rangle =$$

$$= (-1)^{a+b}(i)^{a-b}\left[\frac{\Gamma(i\rho+1+\mu)\Gamma(i\rho+1-\mu)}{a!\,b!\,\Gamma(i\rho+1+\mu-b)\Gamma(i\rho+1-\mu-a)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\, e^{i(\mu+a-b)\varphi}\left(\frac{\sin\Theta}{2}\right)^{a+b}\left(\frac{1-\cos\Theta}{2}\right)^{-i\rho-1-a-b}. \qquad (2)$$

Если сравнить формулу (2) с амплитудой рассеяния для монополя

$$A(\Theta,\varphi) = \frac{\rho(\mu+i\rho)}{2i}\,e^{-i\mu\varphi}\left(\frac{1-\cos\Theta}{2}\right)^{-i\rho-1}\frac{\Gamma(\mu+i\rho+1)}{\Gamma(\mu-i\rho+1)}, \qquad (3)$$

полученной Цванцигером в работе /2/, то можно заметить, что

$$A_{\mu,\rho}(\Theta,\varphi) = -\frac{\rho(\mu+i\rho)}{2i}\,\frac{\Gamma(i\rho+1+\mu)}{\Gamma(-i\rho+1+\mu)}\times$$

$$\times\left|\frac{1+i\rho+\mu}{2};\ \frac{1+i\rho+\mu}{2}\right\rangle\left|\frac{1+i\rho-\mu}{2};\ -\frac{1+i\rho-\mu}{2}\right\rangle.$$

Отсюда сразу можно получить, что амплитуда рассеяния является собственным вектором операторов

$$M_3 A_{\mu,\rho}(\theta,\varphi) = \mu A_{\mu,\rho}(\theta,\varphi)$$

$$N_3 A_{\mu,\rho}(\theta,\varphi) = (1 + i\rho) A_{\mu,\rho}(\theta,\varphi).$$

Из формулы (3) видно, что амплитуда рассеяния имеет полюса в точках

$$1 + i\rho + \mu = -n$$

с вычетами

$$\alpha_{n,\mu}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^n(n+1)(n+1+\mu)}{2n!(n+2\mu+1)!}\, e^{-i\mu\varphi} \left|\frac{1-\cos\theta}{2}\right|^{n+\mu}.$$

Это тоже функции вида (2). Они образуют базис в пространстве представления алгебры O(4) с Казимирами

$$K_1 = +\mu^2 + (n+1+\mu)^2$$

$$K_2 = \mu(n+1+\mu).$$

$\alpha_{n,\mu}(\theta,\varphi)$ пропорционален вектору $\left|\frac{n}{2}+\mu;\ \frac{n}{2}+\mu\right\rangle\left|\frac{n}{2};\ -\frac{n}{2}\right\rangle$ и удовлетворяет уравнениям

$$M_3' \alpha_{n,\mu} = \mu \alpha_{n,\mu}$$

$$N_3' \alpha_{n,\mu} = (n+\mu)\alpha_{n,\mu}.$$

M_3' и N_3' получаются из M_3 и N_3 заменой $1 + i\rho \to -n-\mu$. Если $\mu = 0$, то получаем кулоновскую амплитуду рассеяния и ее вычеты.

Для этого случая разложим вычет $\alpha_n(\theta)$ по полиномам Лежандра

$$\alpha_n(\theta) = \sum_{l=0}^{n} C_{n,l} P_l(\cos\theta).$$

Используя связь базисов (I) и (2), получаем

$$C_{n,l} = \frac{(-1)(n+1)}{2n!n!(2l+1)} \begin{bmatrix} n/2 & n/2 & l \\ n/2 & -n/2 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

Величины $c_{n,l}$ связаны с асимптотиками связных состояний $A_{n,l}$ /3/

$$c_{n,l} = (-1)^{l+1} \frac{2^{-2n-1}}{n+1} (-1)^n |A_{n,l}|^2.$$

Для $A_{n,l}$ получим выражение

$$|A_{n,l}|^2 = \frac{4^n}{n!n!} \frac{1}{2l+1} \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{bmatrix}^2. \qquad (4)$$

Мы видим, что у $|A_{n,l}|^2$ зависимость от l почти что целиком сосредоточилась в той части формулы (4), которая выражается через коэффициент Клебша-Гордана

$$\begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае магнитного монополя для асимптотик связных состояний получается аналогичная формула

$$|A^{\mu}_{n,l}|^2 = \frac{4^n}{(n+\mu)!(n-\mu)!} \frac{1}{2l+1} \begin{bmatrix} \frac{n}{2}+\mu & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2}+\mu & -\frac{n}{2} & \mu \end{bmatrix}.$$

Поступила в редакцию
27 ноября 1974 года.

Литература

1. В. А. Андреев. Препринт ФИАН № 76, 1974 г.
2. D. Zwanziger. Phys. Rev., 176, 1480 (1968).
3. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., "Наука", 1971 г.