ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОЕ ЭПШТЕЙНА

С. Н. Столяров

УДК 535.3

Найдены точные решения для электромагнитных полей в нестационарном слое Эпштейна и получены простые аналитические выражения для коэффициентов трансформации волн в этом слое.

Вопросам трансформации волн при резком и плавном изменении во времени диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$ был посвящен ряд работ (см. обзор /I/ и ссылки в ней), где расчеты проводились в основном с помощью некоторых приближений. Цель настоящего сообщения заключается в нахождении точных аналитических выражений для коэффициентов трансформации волн на примере среды с удобно выбранным законом изменения $\varepsilon(t)$.

Пусть связь между векторами электрической индукции $\vec{D}(\vec{r},t)$ и поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ в однородной и изотропной среде имеет вид $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(t)\vec{E}(\vec{r},t)$. Тогда с помощью уравнений Максвелла для немагнитной среды можно вывести следующее уравнение для амплитуды $u(t)$ электрической индукции вида $\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{e}u(t)\exp(-i\vec{k}\vec{r})$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{c^2k^2}{\varepsilon(t)}u(t) = 0, \qquad (I)$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор поляризации, а $\vec{k}$ – волновой вектор, причем $(\vec{e},\vec{k}) = 0$.

Это уравнение формальной заменой $t \to x/c$, $\varepsilon^{-1}(t) \to \tilde{\varepsilon}(x)$ и $u(t) \to \tilde{u}(x)$ можно привести к уравнению $d^2\tilde{u}(x)/dx^2 + \omega_0^2\tilde{u}(x)/c^2 = 0$, описывающему распространение волн частоты $\omega_0 = ck$ в одномерно-неоднородной среде. Для таких уравнений существуют хорошо разработанные приближенные методы решения при резком и плавном изменении $\tilde{\varepsilon}(x)$, а также найден ряд точных решений /2/. В частности, если $\varepsilon^{-1}(t) = \varepsilon_1^{-1} + (\varepsilon_2^{-1} - \varepsilon_1^{-1})\exp(t/T)\left[1 + \exp(t/T)\right]^{-1} + \varepsilon_3^{-1}\exp(t/T)\times$ $\times\left[1 + \exp(t/T)\right]^{-2}$, где $n_1^2 = \varepsilon_1 = \varepsilon(t)$ при $t \to -\infty$, $n_2^2 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t)$

при $t \to +\infty$, и $\varepsilon_3 = (1/4)\left[\varepsilon^{-1}(0) - (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})/2\right]^{-1}$, то уравнение для $\tilde{u}(x)$ соответствует уравнению для поля в неоднородном слое Эпштейна /2/. Здесь T определяет характерное время изменения величины $\varepsilon(t)$, а величина $L = cT$ – характерное расстояние, на котором изменяется $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Подстановками $\xi = -\exp(\omega_0 t/s)$, $u(\xi) = (1-\xi)^d(-\xi)^a f(\xi)$ при $s = \omega_0 T$, $a = is/n_1$, $b = -is/n_2$ и $d = (1/2)\left[1 \pm (1 + 4s^2\varepsilon_3^{-1})^{1/2}\right]$ уравнение (I) с помощью выражения для $\varepsilon^{-1}(t)$ можно привести к гипергеометрическому уравнению: $\xi(\xi-1)f''(\xi) + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)\xi]\, f'(\xi) + \alpha\beta f(\xi) = 0$, где $\gamma = (2a+1)$, $\alpha = (a + b + d)$, $\beta = (a - b + d)$ и $f'(\xi) = df/d\xi$, $f''(\xi) = d^2f/d\xi^2$. Это уравнение имеет три особые точки $\xi = 0, \infty, 1$. В окрестности каждой из них частные решения этого уравнения представимы в виде сходящихся гипергеометрических рядов /3/, а общее решение является суперпозицией двух линейно-независимых решений. Таким образом, в окрестности $|\xi| < 1$ особой точки $\xi = 0$, то есть в окрестности $t = -\infty$ регулярное решение имеет вид /3/: $f_1(\xi) = A_1^{(+)}F(\alpha, \beta, \gamma; \xi) + A_1^{(-)} \times \xi^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; \xi)$, а в окрестности $|\xi| > 1$ особой точки $\xi = -\infty$, то есть в окрестности $t = +\infty$, регулярное решение имеет вид: $f_2(\xi) = A_2^{(+)}(-\xi)^{-\alpha}F(\alpha, 1 - \gamma + \alpha, 1 + \alpha - \beta; \xi^{-1}) + A_2^{(-)} \times (-\xi)^{-\beta}F(\beta, \beta - \gamma + 1, 1 + \beta - \alpha; \xi^{-1})$. Здесь $F(l, m, q; z)$ – гипергеометрическая функция комплексного аргумента z от трех произвольных параметров l, m, q. Коэффициенты $A_1^{(\pm)}$, определяемые из условий на бесконечности, относятся к решениям, превращающимся при $t \to -\infty$ соответственно в волны $\exp\{i(\pm\omega_1 t - \vec{k}\vec{r})\}$, бегущие в положительном (знак "+" перед $\omega_1 t$) и в отрицательном (знак "–") направлении. Здесь $\omega_1 = \omega_0/n_1$. Коэффициенты $A_2^{(\pm)}$ относятся к аналогичным решениям во второй среде, где $\omega_2 = \omega_0/n_2$. Это нетрудно показать с помощью асимптотических разложений для гипергеометрических функций /3/. Отсюда также видно, что внутри слоя решение $u(t)$ имеет вид двух бегущих навстречу волн с переменными по времени амплитудами и частотами. Только вдали от слоя ($t \to \pm\infty$) эти величины становятся постоянными и равными $A_{1,2}^{(\pm)}$ и $\omega_{1,2} = \omega_0/n_{1,2}$.

В случае отражения волн от неоднородного слоя Эпштейна /2/ перед слоем, то есть при $x \to -\infty$, имеются две волны – падающая и отраженная с амплитудами соответственно $A_I^{(+)}$ и $A_I^{(-)}$, а за слоем (при $x \to +\infty$) – одна прошедшая волна с амплитудой

$A_2^{(+)}$. Условие отсутствия позади слоя (при $x \to +\infty$) второй волны, то есть условие $A_2^{(-)} = 0$, позволяет определить коэффициенты отражения $r = A_1^{(-)}/A_1^{(+)}$ и пропускания $p = A_2^{(+)}/A_1^{(+)}$ для неоднородного слоя Эпштейна /2/. В случае нестационарного слоя Эпштейна $c\varepsilon^{-1}(t)$, приведенным выше, перед слоем, то есть при $t \to -\infty$, имеется одна волна вида $A_1^{(+)}\exp\{i(\omega_1 t - \vec{k}\vec{r})\}$; а после него, то есть при $t \to +\infty$, две волны вида $A_2^{(\pm)}\exp\{i(\pm\omega_2 t - \vec{k}\vec{r})\}$. По аналогии с неоднородным слоем Эпштейна будем называть коэффициент $p = A_2^{(+)}/A_1^{(+)}$ коэффициентом пропускания (прохождения) волны через слой, или коэффициентом трансформации в прямую волну, а коэффициент $r = A_2^{(-)}/A_1^{(+)}$ – коэффициентом отражения, или коэффициентом трансформации в обратную волну. Условие отсутствия при $t \to -\infty$ волны вида $A_1^{(-)}\exp\{i(-\omega_1 t - \vec{k}\vec{r})\}$ позволяет определить оба коэффициента r и p.

Для этого воспользуемся аналитическими свойствами гипергеометрических функций в решениях $f_{1,2}(\xi)$. Эти две функции представляют в различных областях $|\xi|<1$ и $|\xi|>1$ одну и ту же регулярную во всем интервале изменения $0<|\xi|<\infty$ функцию $f(\xi)$. Иными словами, функция $f_2(\xi)$ является аналитическим продолжением в область $|\xi|>1$ функции $f_1(\xi)$, регулярной в области $|\xi|<1$. Поэтому между гипергеометрическими функциями в решениях $f_{1,2}(\xi)$ существует соотношение /3/

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\xi) = (-\xi)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}F(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta;\ \xi^{-1}) +$$

$$+ (-\xi)^{-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ 1+\beta-\alpha;\ \xi^{-1}), \quad (2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция от комплексного аргумента z. Поскольку в нашем случае в решении $f_1(\xi)$ коэффициент $A_1^{(-)} = 0$ (нет такой волны при $t \to -\infty$), то для того, чтобы функция $f_1(\xi)$ с $A_1^{(-)} = 0$ давала при аналитическом продолжении функцию $f_2(\xi)$ и одновременно с этим, чтобы выполнялось соотношение (2), необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} p &= A_2^{(+)}/A_1^{(+)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}; \\ r &= A_2^{(-)}/A_1^{(+)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3)$$

которые и определяют коэффициенты трансформации волн в нестационарном слое Эпштейна.

В прозрачном слое с вещественными $n_{1,2,3}$, используя связь $\Gamma^*(x \pm iy) = \Gamma(x \mp iy)$ и соотношения вида /4/: $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$, $|\Gamma(1 + iy)|^2 = \pi y/\mathrm{sh}(\pi y)$ и $|\Gamma(iy)|^2 = \pi/y\,\mathrm{sh}(\pi y)$ для величин $R = |r|^2$ и $P = |p|^2$, характеризующих коэффициенты отражения и пропускания по мощности, получим

$$R = \frac{x_1}{x_2}\frac{\mathrm{sh}^2(\pi y_1) + \sin^2(\pi x_3)}{\mathrm{sh}(\pi x_1)\mathrm{sh}(\pi x_2)};$$
$$P = \frac{x_1}{x_2}\frac{\mathrm{sh}^2(\pi y_2) + \sin^2(\pi x_3)}{\mathrm{sh}(\pi x_1)\mathrm{sh}(\pi x_2)}, \qquad (4)$$

где $x_{1,2} = 2s/n_{1,2}$; $y_1 = s(n_1^{-1} - n_2^{-1})$; $y_2 = s(n_1^{-1} + n_2^{-1})$; $x_3 = (1/2)\left[1 - (1 + 4s^2\varepsilon_3^{-1})^{1/2}\right]$.

Для переходного слоя Эпштейна, когда $\varepsilon(t)$ меняется монотонно от ε_1 до ε_2, величина $\varepsilon_3^{-1} = 0$ и, следовательно, $x_3 = 0$. В этом случае формулы (4) при $\omega_0 T|n_2 - n_1|/n_1 n_2 \ll 1$ переходят в формулы для резкого скачка вида: $R \simeq \left[(1 - n_2/n_1)/2\right]^2\left[1 - \pi^2 s^2(n_1^{-1} + n_2^{-1})^2/3\right]$ и $P \simeq \left[(1 + n_2/n_1)/2\right]^2\left[1 - \pi^2 s^2(n_1^{-1} - n_2^{-1})^2/3\right]$ с квадратичными поправками по толщине слоя $s = \omega_0 T$, приводящим к уменьшению коэффициентов трансформации на резком скачке. Если же в этом случае $\omega_0 T|n_2 - n_1|/n_1 n_2 \gg 1$, то $R \simeq (n_2/n_1)\exp(-4s/n_{min})$ и $P \simeq n_2/n_1$, где n_{min} – минимальное из двух чисел (n_1, n_2). Это значит, что коэффициент трансформации R в обратную волну экспоненциально мал, а трансформация в прямую волну происходит с сохранением адиабатического инварианта $\omega(t)n(t) = \omega_0$ /1/. Поправки к R и P в этом случае экспоненциально малы.

Для симметричного нестационарного слоя Эпштейна, когда $n_2 = n_1$, а $\varepsilon_3^{-1} \neq 0$, то есть когда $x_1 = x_2 = y_2$, а $y_1 = 0$, получим: $R = \sin^2(\pi x_3)/\mathrm{sh}^2(\pi x_1)$ и $P = 1 + R$. Последнее соотношение соответствует сохранению плотности потока энергии после такого временного скачка, а первое соотношение – наличию осцилляций в коэффициенте отражения, характерных для такого рода слоев в оптике. При этом $R_{min} = 0$ при $|x_3| = m$, а $R_{max} = \left[\mathrm{sh}(\pi x_1)\right]^{-2}$ при $|x_3| = (m + 1/2)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Экспоненциальное обрезание коэффициентов трансформации при $s \gtrsim 1$ обусловлено тем, что рассматриваемая "временная пластинка" имеет в этом случае нерезкие края.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу и Б. М. Болотовскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
14 января 1974 г.

Литература

1. Л. А. Островский, Н. С. Степанов. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 14, 489 (1971).
2. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960 г.
3. Э. Т. Уиттеккер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа, ч.II, ГИФМЛ, М., 1963 г.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1963 г.