О ПРИБЛИЖЕНИИ ВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И О ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В ПРОИЗВОЛЬНО НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

С. Н. Столяров

УДК 535.3

В работе получены приближенные выражения для электромагнитных полей в среде с медленно меняющейся во времени диэлектрической постоянной и выяснены условия применимости этих решений. Для произвольно нестационарной среды найдены приближенные выражения для коэффициентов трансформации волн, переходящие в точные формулы одновременно для резких и плавных временных скачков.

Распространение волн в медленно нестационарных средах и в линиях передач с медленно меняющимися во времени параметрами рассматривалось в ряде работ (см. обзор /I/ и ссылки в нем) в основном применительно к спектру и форме сигналов в них. Здесь мы обсудим некоторые не отмеченные ранее особенности распространения волн в таких системах и получим аналогично /2/ приближенные выражения для коэффициентов трансформации в произвольно нестационарной среде без потерь.

Для этого с помощью уравнений Максвелла и материальных соотношений $\vec{D}(\vec{r},t)=\varepsilon(t)\vec{E}(\vec{r},t)$ в однородной изотропной и немагнитной среде запишем уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{c^2k^2}{\varepsilon(t)}u(t)=0 \qquad (I)$$

для амплитуды $u(t)$ вектора электрической индукции волн вида $\vec{D}(\vec{r},t)=\vec{e}u(t)\exp(-i\vec{k}\vec{r})$, где $\vec{k}$ - волновой вектор, перпендикулярный единичному вектору поляризации $\vec{e}$. Это уравнение путем формальной замены $t\to x/c$, $\varepsilon^{-1}(t)\to\tilde{\varepsilon}(x)$ и $u(t)\to\tilde{u}(x)$ может быть приведено к уравнению $d^2\tilde{u}(x)/dx^2+\omega_0^2c^{-2}\tilde{\varepsilon}(x)\tilde{u}(x)=0$ для волн частоты $\omega_0=kc$ в одномерно-неоднородной среде, геометрооптические решения которого имеют вид /3/:

$$\tilde{u}(x) = [\tilde{n}(x)]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ C_+ \exp\left[i\omega_0/c \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{n}(x')dx' \right] + C_- \exp\left[- i\omega_0/c \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{n}(x')dx' \right] \right\}$$

и справедливы при $\chi_1 = \lambda_0[\tilde{n}(x)]^{-2} \frac{d\tilde{n}}{dx} \ll 1$, где $\tilde{n}^2(x) = \tilde{\varepsilon}(x)$ и $\lambda_0 = c/\omega_0$.

Если теперь в выражении для $\tilde{u}(x)$ перейти обратно к прежним обозначениям и ввести $n^2(t) = \varepsilon(t)$, то мы получим решения уравнения (I) в приближении временной геометрической оптики

$$u(t) = [n(t)]^{1/2} \left\{ C_+ \exp\left(i\omega_0 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt'}{n(t')} \right) + C_- \exp\left(- i\omega_0 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt'}{n(t')} \right) \right\}, \tag{2}$$

которые справедливы при условии $\xi_1 = \frac{T_0}{2\pi} \left| \frac{dn(t)}{dt} \right| \ll 1$, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Последнее условие показывает, что в отличие от приближения геометрической оптики в неоднородных средах, которое неприменимо при $\tilde{n}(x) \to 0$, приближение временной геометрической оптики справедливо и при $n(t) \to 0$. Связано это с тем, что малый параметр χ_1 в неоднородной среде равен относительному изменению $\tilde{n}(x)$ на длине волны в среде $\tilde{\lambda}(x) = 2\pi c/\omega\tilde{n}(x)$ (ω задано): $\chi_1 = \tilde{\lambda}(x) \times \frac{1}{\tilde{n}(x)} \left| \frac{d\tilde{n}}{dx} \right|$. Поскольку при $\tilde{n}(x) \to 0$ $\bar{\lambda}(x) \to \infty$, то параметр χ_1 не может стать малым ни при каких градиентах $\tilde{n}(x)$. В нестационарной же среде малый параметр ξ_1 равен относительному изменению $n(t)$ за период колебаний волны в среде $T(t) = 2\pi n(t)/\omega_0$ ($k = \omega_0/c$ задано): $\xi_1 = T(t) \frac{1}{n(t)} \left| \frac{dn}{dt} \right|$. Поскольку при $n(t) \to 0$ $T(t) \to 0$, то параметр $\xi_1 = \frac{T_0}{2\pi} \left| \frac{dn}{dt} \right|$ остается конечным и достаточно малым при $dn/dt \ll \omega_0$.

Приближенное решение (2) уравнения (I) позволяет искать точные решения этого уравнения в виде

$$u(t) = [n(t)]^{1/2} \left\{ a(t) \exp[i\Phi(t)] + b(t) \exp[-i\Phi(t)] \right\}, \tag{3}$$

где две новые неизвестные функции $a(t)$ и $b(t)$, соответствующие переменным амплитудам прямой и обратной волны, определяются из решения системы

$$\frac{da}{dt} = -\frac{b(t)}{2n(t)}\frac{dn}{dt}\exp\left[-2i\Phi(t)\right];\ \frac{db}{dt} = -\frac{a(t)}{2n(t)}\frac{dn}{dt}\exp\left[2i\Phi(t)\right] \tag{4}$$

с $\Phi(t) = \omega_0 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt'}{n(t')}$ и t_0, определяемым из условий, накладываемых на эти функции. Как видно из (3) и (4), при постоянных $a(t)$ и $b(t)$ мгновенная частота колебаний $\omega(t) = d\Phi/dt = \omega_0/n(t)$ зависит от характера изменения $n(t)$, так что при $dn/dt<0$ будет происходить расширение, а при $dn/dt>0$ – сужение спектра /I/.

Систему (4) можно решить методом последовательных приближений, разлагая $a(t)$ и $b(t)$ в ряды теории возмущений: $a(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j(t)$ и $b(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j(t)$ причем так, что $|a_{j+1}| \ll |a_j|$ и $|b_{j+1}| \ll |b_j|$. Тогда в нулевом приближении по малому параметру ε_1, $a(t)$ и $b(t)$ постоянны, а решение (3) уравнения (I) имеет вид двух независимых встречных волн (см. выражение (2)). В следующем порядке теории возмущений происходит трансформация одной волны в другую и наоборот. В первом приближении по малому параметру эти коэффициенты трансформации $r = b_2\sqrt{n_2}/a_1\sqrt{n_1}$ и $p = a_2\sqrt{n_2}/a_1\sqrt{n_1}$, которые назовем соответственно коэффициентом отражения и пропускания, примут вид

$$r = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \exp(-i\Phi_0)\left| -\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2n(t)}\frac{dn}{dt}\exp[2i\Phi(t)]\right|;$$

$$p = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \exp(i\Phi_0). \tag{5}$$

Здесь принято, что $n(t)$ при $t<t_1$ равно n_1, а при $t>t_2$ равно n_2, и $\Phi_0 = \omega_0 \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{n(t)}$. Экспоненциальные множители в (5) равны набегам фаз прямой и обратной волны в пределах слоя с переменным $n(t)$. Проводя в выражениях (5) оценку коэффициента отражения аналогично /3/, получим, что $|r| \approx \pi\varepsilon_1/4$, где $\varepsilon_1 = \frac{1}{\omega_0}\times$

$\times\left|\frac{dn}{dt}\right|_{max}$, то есть отражение действительно мало в приближении временной геометрической оптики, когда $\xi_1 \ll 1$.

Система уравнений (4) для $a(t)$ и $b(t)$ позволяет получить приближенные выражения для коэффициентов трансформации r и p при произвольном законе изменения $n(t)$. Действительно при вещественных $n(t)$ можно аналогично /2/ показать, что сохраняется величина $|a(t)|^2 - |b(t)|^2 = |a_1|^2$, где постоянную интегрирования мы выбрали из условия, что при $t < t_1$ имеется только одна прямая волна с амплитудой $a(t) = a_1$, то есть с $b_1 = 0$. Кроме этого можно показать также, что величина $\sigma(t) = \rho(t)\exp[i\alpha(t)]$ удовлетворяет уравнению Рикатти $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dn}{dt}\left\{\exp[2i\Phi(t)] - \sigma^2(t)\times\right.$ $\left.\times\exp[-2i\Phi(t)]\right\}/2n(t)$, выделяя вещественную и мнимую часть которого получим систему

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{dn}{dt}\cos\left[2\Phi(t) - \alpha(t)\right]\frac{1-\rho^2(t)}{2n(t)};$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{dn}{dt}\sin\left[2\Phi(t) - \alpha(t)\right]\frac{\rho(t) + \rho^{-1}(t)}{2n(t)}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что $\rho(t) = |\sigma(t)| = \text{th}Q(t)$ при $Q(t) = -\int\limits_{t_1}^{t}\frac{dt'}{2n(t')}\times$ $\times\cos[2\Phi(t') - \alpha(t')]\frac{dn}{dt'}$, а фаза $\alpha(t)$ определяется из второго уравнения системы (6).

Найдем теперь коэффициенты трансформации r и p волны вида $u_1(t) = n_1^{1/2}a_1\exp(i\omega_1 t)$ от "слоя" с произвольным $n(t)$ при $t_1 < t < t_2$ и с $n(t) = n_1$ при $t < t_1$ и $n(t) = n_2$ при $t > t_2$. В частном случае пределы $t_{1,2}$ могут быть и бесконечными. Поскольку при $t > t_2$ решение (3) имеет вид $u_2(t) = n_2^{1/2}\left[a_2\exp(i\omega_2 t) + \right.$ $\left.+ b_2\exp(-i\omega_2 t)\right]$, то в этом случае коэффициенты трансформации равны: $p = (n_2/n_1)^{1/2}a_2/a_1$ и $r = (n_2/n_1)^{1/2}b_2/a_1$, где $\omega_{1,2} = \omega_0/n_{1,2}$. Используя выражение для $\rho(t) = \text{th}Q(t)$ и полученный выше первый интеграл системы (4), можно определить квадраты модулей коэффициентов трансформации

$$R = |r|^2 = \frac{n_2}{n_1}\,\text{sh}^2Q(t_2); \quad P = |p|^2 = \frac{n_2}{n_1}\,\text{ch}^2Q(t_2), \tag{7}$$

где

$$Q(t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2n(t)} \cos[2\Phi(t) - \alpha(t)] \frac{dn}{dt} \right|, \quad \Phi(t) = \omega_0 \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{n(t')},$$

а $\alpha(t)$ – решение уравнения $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{dn}{dt} \sin[2\Phi(t) - \alpha(t)][\text{th}Q(t) + \text{cth}Q(t)]$. Следуя работе /2/, получим приближенное выражение для $\alpha(t)$ путем сопоставления точных формул (7) с неизвестной $\alpha(t)$ с приближенными формулами для этих величин в случае геометрооптических решений (5), которые имеют вид:

$$P \simeq \frac{n_2}{n_1}; \; R \simeq \frac{n_2}{n_1} Q_0 \quad \text{и} \quad Q_0 = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2n(t)} \exp[2i\Phi(t)] \frac{dn}{dt} \right| \tag{8}$$

с $\Phi(t) = \omega_0 \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{n(t')}$, причем $Q_0 \ll 1$. Сравнивая решения (8) с решениями (7) при $Q(t_2) \ll 1$, видим, что в этом случае решения (7) переходят в решения (8) тогда, когда $Q(t_2) = Q_0$ при любых параметрах t_0, t_1 и t_2. Последнее равенство является уравнением для определения $\alpha(t)$ в приближении временной геометрической оптики. Основное приближение, используемое нами, будет состоять в том, что мы в формулах (7) заменим $Q(t_2)$ на Q_0 при любом законе изменения $n(t)$. Тогда получим, что

$$P = |p|^2 \simeq \frac{n_2}{n_1} \text{sh}^2 Q_0; \quad R = |r|^2 \simeq \frac{n_2}{n_1} \text{ch}^2 Q_0 \tag{9}$$

при любом $n(t)$, а Q_0 приведено в (8).

Приближенные формулы, совпадающие при $Q_0 \ll 1$ с геометрооптическими решениями (8), переходят в точные формулы для резкого изменения $n(t)$, то есть они включают в себя результаты двух предельных случаев изменения $n(t)$. Можно показать аналогично /2/, что эти формулы дают выражения близкие к точным формулам для коэффициентов трансформации волн при кусочно-постоянной, кусочно-линейной и экспоненциальной зависимостях $n(t)$. В частности для симметричного кусочно-постоянного слоя длительности T:

$$|r| = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \left| \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\gamma} - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\gamma} \right| \quad \text{и} \quad |p| = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \left| \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\gamma} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\gamma} \right|$$

при $\gamma = |\sin\omega_2 T|$ и $\omega_2 = \omega_1 n_1/n_2$ с характерными осцилляциями при изменении величины T. Для переходного нестационарного слоя Эпштейна длительности T: $|r| = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2}\left|\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}\exp(-s_2)} - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}\exp(-s_2)}\right|$ и $|p| = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2}\left|\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}\exp(-s_2)} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}\exp(-s_2)}\right|$, которые переходят в формулы резкого скачка при $s_2 = 2\pi\omega_2 T \ll 1$ и в формулы приближения временной геометрической оптики при $s_2 \gg 1$.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу и Б. М. Болотовскому за внимание к работе.

Поступила в редакцию
I4 января I974 г.

Литература

1. Л. А. Островский, Н. С. Степанов. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, <u>I4</u>, № 4, 489 (I97I).
2. Л. П. Пресняков, И. И. Собельман. Там же, <u>8</u>, № I, 57 (I965).
3. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., I960 г.