Краткие сообщения по физике № 5 май 1973

О СПИНОВЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

К. В. Владимирский

УДК (621.375.823)

Исследована устойчивость стационарных режимов спинового генератора с нелинейностью в цепи обратной связи, исключающей появление амплитудной самомодуляции. Устойчивость определяется порогом возникновения фазовой самомодуляции, полученным ранее для спинового генератора с линейной, как в мазере, обратной связью.

Спиновый генератор как средство стабилизации частоты в спектроскопии ядерного магнитного резонанса исследован в работах Б. А. Лабзова и автора /1,2/. Была указана наиболее существенная причина нарушения устойчивости стационарных режимов спинового генератора - неоднородное уширение, т.е. разброс в резонансных частотах рабочего вещества вследствие неоднородности поляризующего поля. Теоретическое исследование динамики спинового генератора с линейной обратной связью /3,4/ позволило определить область устойчивости и характер нестационарных процессов.

Соответствующее характеристическое уравнение /4/ распадается на два

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + (1 - h^2)\lambda + 2s^2}{(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + s^2 + h^2)(1 + s^2 + h^2)}\, g(h)dh = 0, \qquad (1)$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + (2 - h^2)\lambda + 1 + s^2 - h^2}{(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + s^2 + h^2)(1 + s^2 + h^2)}\, g(h)dh = 0. \qquad (2)$$

Здесь λ - характеристический показатель, h - расстройка, отнесенная к половине естественной ширины линии, s - безразмерная амплитуда поля в резонаторе, $g(h) = g(-h)$ - форм-функция, характеризующая неоднородное уширение.

В настоящей заметке мы рассмотрим спиновый генератор с нелинейной обратной связью - важный предельный случай, когда амплитуда поля в резонаторе неизменна, а поляризация вещества определяет только фазу поля. Именно такой режим был осуществлен /I/ путем введения в петлю обратной связи нелинейности специального вида - ограничения. Это изменение подавляет возмущения, связанные с колебаниями амплитуды, и улучшает устойчивость. Как показано ниже, изучение нелинейного прибора позволяет яснее понять процессы нарушения устойчивости в приборе с линейной, как в мазере, обратной связью.

Как и ранее /3/, предположим, что ширина полосы частот резонатора (вместе с усилителем) много больше ширины линии, и зададим обратную связь соотношениями:

$$H_x = H_1 \frac{\bar{M}_y}{\sqrt{\bar{M}_x^2 + \bar{M}_y^2}}, \quad H_y = -H_1 \frac{\bar{M}_x}{\sqrt{\bar{M}_x^2 + \bar{M}_y^2}}. \qquad (3)$$

Здесь H_x, H_y, M_x, M_y - компоненты поля и ядерной намагниченности, H_1 - амплитуда поля. Чертой обозначены величины, усредненные с весом $g(h)$. Подставляя (3) в уравнения Блоха /5/ и полагая $T_1 = T_2$, получаем

$$\frac{dp}{dt} + p - hq - sr \frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} + q + hp - sr \frac{\bar{q}}{\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{dr}{dt} + r + s \frac{p\bar{p} + q\bar{q}}{\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} = 1.$$

Здесь p, q, r - безразмерные компоненты вектора ядерной намагниченности во вращающейся системе координат. Стационарное решение системы (4) с фазой, соответствующей $\bar{q}_0 = 0$, как и в случае линейной обратной связи, представляет решение уравнений Блоха для "медленного прохождения":

$$
\begin{aligned}
p_0 &= s/(1 + s^2 + h^2),\\
q_0 &= -hs/(1 + s^2 + h^2),\\
r_0 &= (1 + h^2)/(1 + s^2 + h^2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Полагая $p = p_0 + p_1, \ldots,$ найдем линеаризованную систему уравнений для малых отклонений от стационарного решения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp_1}{dt} + p_1 - hq_1 - sr_1 = 0,\\
&\frac{dq_1}{dt} + q_1 + hp_1 - sr_0 \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_0} = 0,\\
&\frac{dr_1}{dt} + r_1 + sp_1 + sq_0 \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_0} = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Уравнения (6) отличаются от уравнений приборов с линейной обратной связью /4/: из двух усредненных величин $\bar{p}_1$, $\bar{q}_1$ они содержат только $\bar{q}_1$ - величину, пропорциональную возмущению фазы. Основные изменения, которые вносит введение нелинейности, можно выяснить, если рассмотреть простейшую форм-функцию

$$
g(h) = \frac{1}{2}\left[f(h + \delta) + f(h - \delta)\right], \tag{7}
$$

где $f(x)$ - дельта-функция Дирака, δ - параметр, характеризующий величину неоднородного уширения.

Вычисления, подобные приведенным в /3/, показывают, что так же, как и в случае нелинейной обратной связи, система уравнений распадается на две и, соответственно, дает два характеристических уравнений

$$
(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + s^2 + \delta^2) = 0, \tag{8}
$$

$$
\lambda\left[\lambda^2 + (2 - \delta^2)\lambda + 1 + s^2 - \delta^2\right] = 0. \tag{9}
$$

В отличие от линейной задачи, корни характеристического уравнения первой подсистемы (8) при любых значениях параметров s, δ имеют отрицательную действительную часть, а граница области устойчивости определяется исследованием уравнения (9), которое тождественно совпадает с соответствующим уравнением линейной задачи /3/. В случае линейной задачи это уравнение дает более слабый из двух критериев устойчивости.

Исследование системы (6) для произвольной форм-функции дает результат, представляющий непосредственное обобщение приведенного. Комбинируя уравнения для аргументов h и $-h$, легко получить систему уравнений, в которой интегральные величины $\bar{q}_1$ выпадают; характеристическое уравнение этой системы совпадает с (8). Второе характеристическое уравнение получается как тождество относительно $\bar{q}_1$, оно совпадает с уравнением (2), полученным ранее для линейной обратной связи. Это уравнение и определяет в рассматриваемом случае нелинейной обратной связи границу области устойчивости. Полученный результат, совпадение характеристических уравнений различных по существу систем, не является случайным. Введение ограничения не изменяет уравнений состояния рабочего вещества и может рассматриваться как наложение связи, которая не влияет на одни процессы нарушения устойчивости и полностью исключает возникновение других. Можно сказать также, что введение ограничения является средством экспериментального наблюдения фазовых возмущений. В приборе с линейной обратной связью они были бы замаскированы амплитудной самомодуляцией.

Исследование уравнений (I) и (2) дает, соответственно, границы области устойчивости для приборов с линейной и нелинейной обратной связью. Простые оценки, подобные приведенным в /4/, показывают, что в предельном случае больших амплитуд поля в резонаторе уравнению (2) соответствует большая в $\sqrt{2}$ раз величина допустимого неоднородного уширения. В противоположном предельном случае $s = 0$ левые части уравнений (I) и (2) тождественны с точностью до множителей, не влияющих на решение задачи устойчивости; границы области устойчивости имеют, соответственно, при $s = 0$ общую точку. Уравнение (I) не может иметь корней, равных нулю при s, отличном от нуля, поэтому граница области устойчивости, соответствующая уравнению (I), всегда характеризуется колебательным возникновением неустойчивости.

Полагая $\lambda = 0$ в уравнении (2), мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + s^2 - h^2}{(1 + s^2 + h^2)^2} \, g(h;\ \delta) dh. \qquad (10)$$

Если это уравнение для заданной форм-функции имеет действительное решение, то в плоскости параметров s^2, δ^2 ему соответствует прямая, на которой уравнение (2) имеет (нетривиальный) корень $\lambda = 0$. На пересечении этой прямой и линии, на которой уравнение (2) имеет чисто мнимые корни, апериодическое нарушение устойчивости сменяется колебательным.

Поступила в редакцию
20 февраля 1973 г.

Литература

1. K. V. Vladimirsky, B. A. Labzov. Nucl. Instr. a. Methods, 14, 94 (1961); К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов. ПТЭ, № 2, 103 (1962).
2. K. V. Vladimirsky, B. A. Labzov. Proc. X Coll. Spectr. Internat., Spartan Books, Washington, 1963, p. 677.
3. К. В. Владимирский. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 41 (1971).
4. К. В. Владимирский. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 47 (1972).
5. F. Bloch. Phys. Rev., 70, 460 (1946).