Краткие сообщения по физике № 12 декабрь 1973

О "НЕПРИЧИННОМ" ПОВЕДЕНИИ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

А. М. Камаев, В. Я. Файнберг

УДК 539.12

В данной работе показано, что частица со спином 3/2 как во внешнем поле Янга-Милса в теории Рариты-Швингера, так и в теории с произвольным числом дополнительных спиноров при минимальной связи с электромагнитным полем обнаруживает "непричинное" поведение.

В работе Вело и Цванзигера /1/ было показано, что уравнение частицы со спином 3/2 во внешнем электромагнитном поле содержит "непричинные" решения. Аналогичные решения были найдены также при взаимодействии частицы 3/2 с градиентом внешнего скалярного поля /2/. Цель настоящей заметки - показать, что частица со спином 3/2 обнаруживает "непричинное" поведение во внешнем поле Янга-Милса, а также при введении в теорию дополнительных спиноров низшего ранга.

1. Пусть частица 3/2 обладает изотопспином 1/2. Лагранжиан типа Рариты-Швингера такой частицы во внешнем поле Янга-Милса имеет вид:

$$L = \bar{B}_\mu(\hat{p} - m)B^\mu - \bar{B}_\mu(\gamma^\mu p^\nu + p^\mu\gamma^\nu)B_\nu + \hat{\bar{B}}(\hat{p} + m)\hat{B}. \qquad (1)$$

Здесь $p_\mu \equiv i\partial_\mu + g\tau^a A^a_\mu$,

$$[p_\mu, p_\nu] \equiv \tilde{F}_{\mu\nu} = \tau^a F^a_{\mu\nu} = ig\tau^a\left\{\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + 2g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right\}. \qquad (2)$$

Уравнения движения имеют вид:

$$R^\mu \equiv (\hat{p} - m)B^\mu - \gamma^\mu pB - p^\mu\hat{B} + \gamma^\mu(\hat{p} + m)\hat{B} = 0$$
$$pB \equiv p_\mu B^\mu, \qquad \hat{B} \equiv \gamma_\mu B^\mu. \qquad (3)$$

Сворачивая R^μ с γ_μ и p_μ и вводя обозначения $Q \equiv -\gamma_\mu R^\mu$,

$R \equiv -2p_\mu R^\mu$, $\Theta \equiv R - mQ$ получим из (3) систему:

$$
\begin{aligned}
&R^\mu = 0,\\
&Q \equiv 2pB - (2\hat{p} + 3m)\hat{B} = 0, \qquad\qquad (4)\\
&\Theta \equiv 3m^2\hat{B} - \gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\nu \hat{B} + 2\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} B_\nu = 0.
\end{aligned}
$$

Для определения характеристических поверхностей σ системы (4) используем метод работы /3/. Скачок поля B^μ обращается в ноль на σ. Обозначая скачок производной B^μ на σ через $\xi_\nu C^\mu$, где ξ_ν вектор нормали к σ, находим из (4)

$$
\begin{aligned}
&\hat{\xi} C^\mu - \xi^\mu \hat{C} = 0,\\
&\xi_\mu C^\mu - \hat{\xi}\hat{C} = 0, \qquad\qquad (5)\\
&\xi^\mu \{3m^2\hat{C} - \gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\mu \hat{C} + 2\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} C_\nu\} = 0.
\end{aligned}
$$

Система (5) имеет два класса решений: I) $\xi^2 = 0$, $\xi_\mu C^\mu = 0$ – причинный класс, и 2) $\xi^2 \neq 0$. Рассмотрим второй класс. Имеем из (5)

$$
\{3m^2\hat{\xi} - \hat{\xi}\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\nu - 2\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\xi_\nu\}\hat{C} = 0. \qquad (6)
$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только если

$$
\det\{3m^2\hat{\xi} - \hat{\xi}\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\nu - 2\gamma_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}\xi_\nu\} = 0. \qquad (7)
$$

Определитель (7) приводит к следующему уравнению для нормалей:

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha^2\xi^2 + (\vec{\xi}\vec{H}_a)^2 - (\xi^0\vec{H}_a + [\vec{\xi}\vec{E}_a])^2\}^2 +\\
&+ 4\{\varepsilon^{abc}(\xi^0\vec{H}_b + [\vec{\xi}\vec{E}_b])(\vec{\xi}\vec{H}_c)\}^2 = 0, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

где $\alpha = 3m^2/2g$, а "напряженности" внешнего поля $\vec{E}_a$ и $\vec{H}_a$ определяются из $F_a^{\mu\nu}$ по аналогии с напряженностями электромагнитного поля. Легко видеть, что уравнение (8) имеет "непричинные" решения ($\xi^2>0$, или комплексные ξ^0). Пусть $\xi^2>0$. Тогда в системе $\vec{\xi} = 0$ находим из (8)

$$
(\xi^0)^2(\alpha^2 - \vec{H}_a^2) = 0,
$$

и при $\vec{H}_a^2 = \alpha^2$ значения ξ^0 произвольны. Нетрудно, также показать, что уравнение (8) имеет комплексные решения.

Отметим, что при отсутствии изотопспина последний член в (8) пропадает и мы получаем условия, найденные в /I/ для внешнего электромагнитного поля.

2. При введении произвольного числа дополнительных спиноров D_i система уравнений для B^μ может быть записана в виде /4/:

$$(\hat{p} - m)B^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu pB + (p^\mu - \frac{1}{4}\gamma^\mu \hat{p}) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D_i = 0, \quad \hat{B} = 0,$$

$$pB + (\hat{p} + a_i m)D_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots N, \; N > 2. \tag{9}$$

Из этой системы в отсутствии внешних полей должны следовать обычные дополнительные условия

$$pB \equiv 0, \; D_i \equiv 0, \; i = 1,2,\ldots N. \tag{10}$$

Из (9) следует система однородных уравнений для pB и D_i

$$2(\hat{p} - 2m)pB + 3p^2 \sum_i \alpha_i D_i = 0,$$

$$pB + (\hat{p} + a_i m)D_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots N. \tag{11}$$

Для того, чтобы имело место (10), необходимо и достаточно, чтобы определитель Δ системы (11) ни при каких значениях p_μ не обращался в ноль

$$\Delta \equiv (\hat{p})^{N+1} \left\{2 - 3\sum_i \alpha_i\right\} - m(\hat{p})^N \left\{4 - 3\sum_i \alpha_i a_i\right\} -$$

$$- 3m^2(\hat{p})^{N-1} \sum_i \alpha_i a_i^2 - \ldots - 4m^{N+1} \prod_{i=1}^{N} a_i \neq 0.$$

Отсюда мы получаем $(N + 1)$ условий на $2N$ коэффициентов α_i и a_i:

$$\begin{gathered} 2 - 3\sum_i \alpha_i = 0, \\ 4 - 3\sum_i \alpha_i a_i = 0, \\ \sum_i \alpha_i a_i^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{12}$$

При определении характеристических поверхностей σ системы (9) нам понадобятся только три первых условия из (12). Вводя в (9) электромагнитное поле путем замены $p_\mu \to P_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$, после ряда преобразований с учетом (I2) находим

$$(\hat{P} - m)B^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu PB + (P^\mu - \frac{1}{4}\gamma^\mu \hat{P})\sum_i \alpha_i D_i = 0, \quad \hat{B} = 0,$$

$$PB + (\hat{P} + a_i m)D_i = 0, \qquad (I3)$$

$$\frac{3m^2}{2}\sum_i \alpha_i a_i^2 D_i - \gamma_\mu F^{\mu\nu}\gamma_\nu \sum_i \alpha_i D_i - 2\gamma_\mu F^{\mu\nu} B_\nu = 0.$$

Обозначая скачки производных B^μ и D_i на σ соответственно через $\xi_\nu C^\mu$ и $\xi_\nu D_i$, находим из (I3)

$$\hat{\xi} C^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu \xi_\nu C^\nu + (\xi^\mu - \frac{1}{4}\gamma^\mu \hat{\xi})\sum_i \alpha_i D_i = 0, \qquad (I4)$$

$$\xi_\nu C^\nu + \hat{\xi} D_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots N, \qquad (I5)$$

$$\xi^2\left\{\frac{3m^2}{2}\sum_i \alpha_i a_i^2 D_i - \gamma_\mu F^{\mu\nu}\gamma_\nu \sum_i \alpha_i D_i - 2\gamma_\mu F^{\mu\nu} C_\nu\right\} = 0. \qquad (I6)$$

Эта система, также как и система (5), имеет два класса решений: I) причинный ($\xi^2 = 0$, $\xi_\nu C^\nu = 0$) и 2) $\xi^2 \neq 0$, $\xi_\nu C^\nu \neq 0$. В случае $\xi^2 \neq 0$ из (I4) и (I5) следует, что $D_i = -(1/\xi^2)\hat{\xi}\xi_\nu C^\nu$, а $C^\mu = (4/3\xi^2)(\xi^\mu - \gamma^\mu \hat{\xi}/4)\xi_\nu C^\nu$. Уравнение (I6) при этом принимает вид

$$\left\{\gamma_\mu F^{\mu\nu}\gamma_\nu \hat{\xi} - 2\gamma_\mu F^{\mu\nu}\xi_\nu\right\}\xi_\lambda C^\lambda = 0.$$

Обращение в ноль детерминанта этого уравнения приводит к уравнению характеристик

$$\xi^2 \vec{H}^2 + [\vec{\xi}\vec{E}]^2 + [\vec{\xi}\vec{H}]^2 + 2\xi^0(\vec{\xi}[\vec{H}\vec{E}]) = 0. \qquad (I6')$$

Уравнение (I6') при $(\vec{E}\vec{H}) \neq 0$ имеет комплексные ("непричинные") решения. При $\vec{E}\vec{H} = 0$ и $H^2 - E^2 > 0$ уравнение (I6') имеет действительные причинные решения ($\xi^2 \leqslant 0$).

3. Таким образом можно, по-видимому, сделать вывод, что трудность с появлением "непричинных" решений в уравнении для частицы со спином 3/2 во внешнем поле носит (на классическом уровне) весьма общий характер и вряд ли может быть преодолена в рам-

ках одночастичной задачи. Исследование этого вопроса методами квантовой теории поля является весьма актуальной задачей, особенно в связи с реальным существованием заряженной частицы со спином 3/2 - Ω^-- мезона, время жизни которого $\sim 10^{-10}$ сек.

Поступила в редакцию
29 октября 1973 г.

Литература

1. G. Velo, D. Zwanziger. Phys. Rev., 186,1337 (1969).
2. L. P. S. Singh. Phys. Rev., D7, 1256 (1973).
3. J. Madore, W. Tait. Commun. Math. Phys., 30, 201 (1973).
4. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 20, 27 (1950).