Краткие сообщения по физике № 1 январь 1972

ВОЗМОЖНОСТЬ МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ЧАСТИЦ ИЗ СИНХРОТРОНА НА РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю. А. Башмаков, К. А. Беловинцев

В настоящее время медленный вывод частиц, основанный на резонансной раскачке радиальных бетатронных колебаний возбуждением нелинейного резонанса, осуществлен на целом ряде синхротронов как слабофокусирующих /1,2,3/, так и сильнофокусирующих /4,5/. Во многих существующих и проектируемых /6,7/ системах медленного вывода используется резонанс третьего порядка, возбуждаемый соответствующей гармоникой квадратичного возмущения магнитного поля синхротрона. В настоящей работе обсуждается возможность использования для медленного вывода частиц из синхротрона резонанса четвертого порядка, возбуждаемого кубической гармоникой нелинейности магнитного поля, которая может создаваться полюсными обмотками, токовыми пластинами или октупольными линзами. Как будет показано ниже, этот резонанс обладает рядом достоинств.

Для возбуждения резонанса четвертого порядка на частоте радиальных бетатронных колебаний $Q = m/4$ необходима m-ая гармоника кубической нелинейности магнитного поля. Уравнение радиальных бетатронных колебаний относительно равновесной орбиты в нормализованной системе единиц /8/ вблизи резонанса с учетом постоянной (не зависящей от азимута) составляющей кубической нелинейности B имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\Phi^2} + \left(\left(\frac{m}{4}\right)^2 - \delta\right)x = -Ax^3\cos m\Phi - Bx^3, \qquad (1)$$

где x – радиальное смещение относительно равновесной орбиты, $\Phi = \int(ds/Q\beta)$, s – расстояние вдоль равновесной орбиты, A – амплитуда m-ой гармоники кубической нелинейности и $\delta = (m/4)^2 - Q^2$ – величина расстройки. При этом радиальное смещение $\bar{x}$ и угол $\bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{d\Phi}$ на некотором азимуте будут связаны с нормализованными переменными x, x' преобразованием вида

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{x}'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\beta\beta_n}}\begin{pmatrix}\beta & 0\\ -\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x'\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где β и α имеют обычный смысл /9/, β_n имеет ту же размерность, что и β, и используется как масштабный фактор. Решение уравнения (1) в первом приближении, найденное по методу усреднения Боголюбова-Митропольского /10/, записывается как

$$x = a(\Phi)\cos\left[\frac{m}{4}\Phi + \Psi(\Phi)\right] \qquad (3)$$

с амплитудой a и фазой Ψ, зависящими от азимута

$$\frac{da}{d\Phi} = \frac{A}{4m}a^3\sin 4\Psi,$$
$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{A}{4m}a^2\cos 4\Psi + \left(Q - \frac{m}{4}\right) + \frac{B}{2}a^2. \qquad (4)$$

Для дальнейшего анализа движения удобно перейти к новым переменным

$$X = a\cos\Psi,$$
$$Y = -a\sin\Psi. \qquad (5)$$

В этих переменных уравнения движения (4) принимают каноническую форму

$$\dot{X} = \frac{dX}{d\Phi} = \frac{\partial H}{\partial Y},$$
$$\dot{Y} = \frac{dY}{d\Phi} = -\frac{\partial H}{\partial X} \qquad (6)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{A}{16m}(X^4 - 6X^2Y^2 + Y^4) + \frac{1}{2}\left(Q - \frac{m}{4}\right)\left(X^2 + Y^2\right) +$$
$$+ \frac{B}{2}(X^2 + Y^2)^2. \qquad (7)$$

Переменные X и Y имеют простой физический смысл. Действительно, если прослеживать изменение параметров частицы на определенном, например, нулевом азимуте ускорителя через каждые четыре оборота, то выражения для $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ будут иметь вид:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\beta_\Phi}{\beta_n}}\, X,$$
$$\bar{x}' = \frac{1}{\sqrt{\beta_\Phi \beta_n}}\left(\frac{m}{4} Y - \alpha_\Phi X\right), \qquad (8)$$

здесь β_Φ, α_Φ – значения β, α на выбранном азимуте.

В случае равенства рабочей частоты ускорителя резонансной частоте $Q = m/4$ и при отсутствии возмущений любая изображающая точка на фазовой плоскости X, Y через каждые четыре оборота переходит сама в себя. При наличии возмущений число фиксированных точек, т.е. точек, которые через четыре оборота переходят сами в себя, будет конечным. Фиксированные точки определяются из условия

$$\frac{dX}{d\Phi} = \frac{\partial H}{\partial Y} = 0,$$
$$\frac{dY}{d\Phi} = -\frac{\partial H}{\partial X} = 0. \qquad (9)$$

Рассмотрим случай, когда B=0. В этом случае имеется пять фиксированных точек: четыре, симметрично раположенные относительно точки $X = 0$, $Y = 0$, и сама эта точка. Введя величину $X_0 = \sqrt{2|Q - m/4|m/A}$, положение фиксированных точек можно записать как

$$а)\ Q - \frac{m}{4} > 0,\ X = \pm X_0,\ Y = \pm X_0, \tag{10}$$

$$б)\ Q - \frac{m}{4} < 0,\ X = \pm\sqrt{2}X_0,\ Y = 0, \tag{11}$$

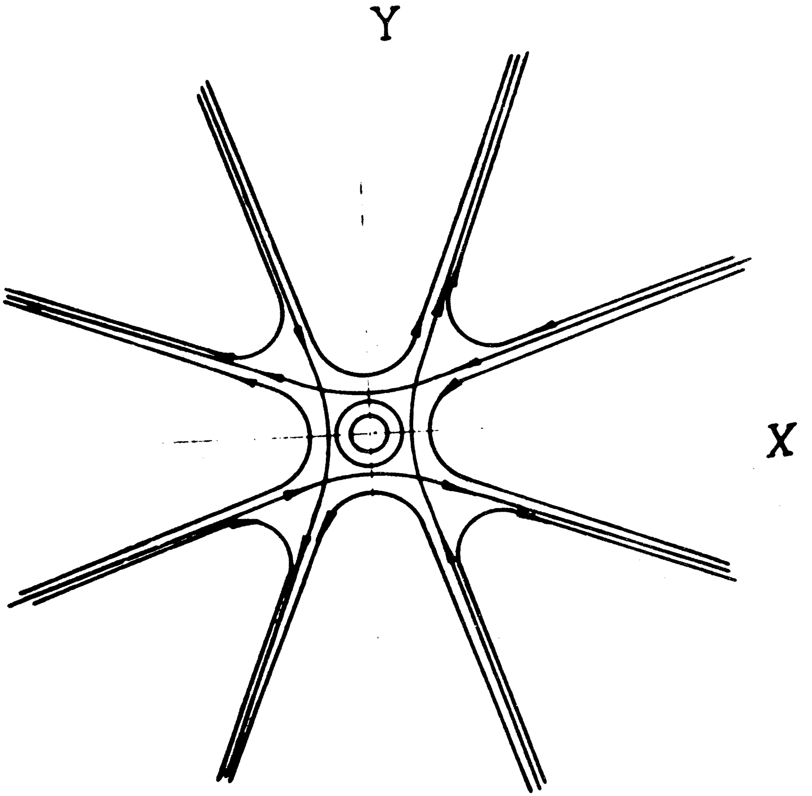
$$X = 0,\ Y = \pm\sqrt{2}X_0.$$

Анализ устойчивости движения проводился для случая (а), когда $Q - m/4 > 0$; случай $Q - m/4 < 0$ анализируется аналогично. Можно показать, что фиксированная точка $X = 0$, $Y = 0$ является особой точкой типа центр. Движение вокруг нее при $|X|, |Y| < X_0$ происходит по замкнутым траекториям $H = const$. Фиксированные точки (10) и (11) представляют собой особые точки типа седла. Интегральная кривая $H(X,Y) = const$, проходящая через особую точку типа седла, является сепаратрисой. В случае B = 0 разомкнутые ветви сепаратрисы уходят на бесконечность. Область на фазовой плоскости вокруг точки $X = 0$, $Y = 0$, ограниченная сепаратрисой, соответствует области устойчивых колебаний. На рис. 1 изображены кривые постоянного H на фазовой плоскости (X, Y) для $Q - m/4 > 0$. Интересно отметить, что сепаратриса асимптотически приближается к линиям

$$Y = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{8}}\,X, \tag{12}$$

и уменьшение размеров области устойчивости не приводит к изменению направления асимптот.

При выводе величина X_0 медленно уменьшается, а сепаратриса приближается к границе фазового пространства, занимаемого пучком. Дальнейшее уменьшение X_0 приводит к тому, что часть частиц, оказывается вне сепаратрисы и будет двигаться в область боль-



Р и с. 1. Фазовая плоскость X, Y вблизи резонанса четвертого порядка при B=0.

ших амплитуд; достигая выводного устройства – септум-магнита, частицы будут выводиться из камеры ускорителя. Уменьшая X_0 до нуля, можно вывести все частицы. Уравнение движения вдоль сепаратрисы для $Q - m/4 > 0$ имеет вид

$$\frac{dX}{d\Phi} = \frac{A}{8m}\frac{1}{Y}\left[4X_0^2(X_0^2 - X^2) - X^4 + Y^4\right]. \qquad (13)$$

Видно, что для частиц вне сепаратрисы, движущихся около точки $|X| = X_0$, $|Y| = X_0$, амплитуда сначала растет медленно, а затем скорость роста увеличивается.

Фазовая диаграмма на рис. 1 с изменением Φ вращается с частотой $m/4$. Естественно выбрать положение выводного септум-магнита на таком азимуте, на котором положение одной из асимптот, вдоль которой происходит уход частиц на бесконечность, совпадает с осью X. Если $X_s \gg X_0$, где X_s – координата расположения септума, частица будет оказываться вблизи септума каждый четвертый оборот, и шаг ее вблизи септума будет

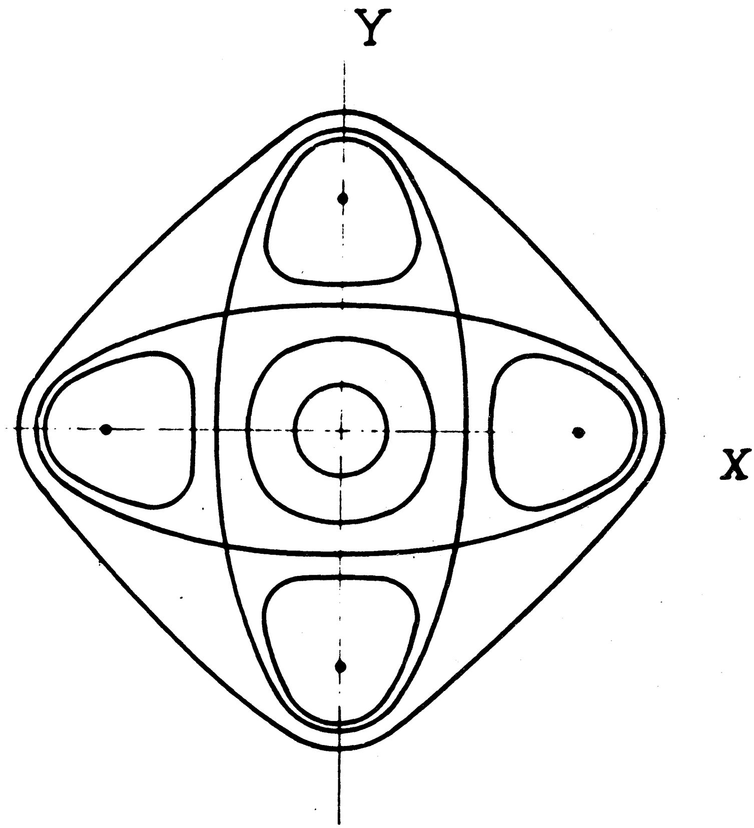
$$\Delta X = 8\pi\sqrt{10 + 7\sqrt{2}}(A/m)X_s^3. \qquad (14)$$

Таким образом, резонанс четвертого порядка имеет две характерные особенности шаг вблизи септума пропорционален кубу расстояния от равновесной орбиты до септума; асимптоты, вдоль которых происходит движение при больших X, проходят через точку X=0, Y = 0.

С уменьшением размера сепаратрисы положение асимптот не меняется; это может быть использовано для уменьшения углового разброса выведенного пучка.

Рассмотрим влияние постоянной составляющей кубической нелинейности ($B \neq 0$). Можно выделить три случая.

1) $2mB/A \geq 1$. Единственная фиксированная точка X= =0, Y = 0. Фазовые траектории представляют собой непересекающиеся замкнутые кривые, окружающие центр, раскачки колебаний не происходит.



Р и с. 2. Фазовая плоскость X, Y вблизи резонанса четвертого порядка при $2mB/A < -1$.

2) $I > 2mB/A > -I$. В этом случае существует пять фиксированных точек: центр $X = 0$, $Y = 0$ и четыре точки типа седла

$$X = \pm \frac{X_0}{\sqrt{1 - 2m\frac{B}{A}}}, \quad Y = \pm \frac{X_0}{\sqrt{1 - 2m\frac{B}{A}}}. \tag{15}$$

Углы между асимптомами и величина области устойчивых колебаний существенно зависят от отношения B/A.

3) $2mB/A < -I$. К фиксированным точкам, перечисленным в пункте 2), добавляется еще четыре точки типа центр

$$X = \pm \frac{\sqrt{2}\, X_0}{\sqrt{-1 - 2mB/A}}, \quad Y = 0,$$
$$X = 0, \quad Y = \pm \frac{\sqrt{2}\, X_0}{\sqrt{-1 - 2mB/A}}. \tag{16}$$

Сепаратриса представляет собой замкнутую кривую (она изображена на рис. 2). Условие вывода состоит в том, чтобы линия сепаратрисы подходила в район септума.

Итак, вывод на резонансе четвертого порядка обладает рядом достоинств: большая скорость роста амплитуды бетатронных колебаний вблизи септума, независимость направления асимптот от величины области устойчивости, меньшее влияние постоянной составляющей кубической нелинейности, чем при резонансах более низкого порядка. Все это позволяет надеяться на осуществление достаточно эффективной системы медленного вывода, использующей резонанс четвертого порядка.

Поступила в редакцию
1 сентября 1971 г.

Литература

1. U. Bizzari, M. Conte, I. F. Quercia, A. Turrin. Proc. 5-th. Int. Conf. High-Energy Accelerators, Frascati (1965); p. 476.
2. J. Kirchgessner, I. W. Benoit, F. C. Shoemaker. Proc. 5-th. Int. Conf. High-Energy Accelerators, Frascati (1965); p. 481.
3. R. W. Allison, I. H. A. Grunder, G. R. Lambertson. Труды УП Международной конференции по ускорителям. Ереван (1969), т.1, стр. 675.
4. The AGS Staff (presented by M. Q. Barton). Труды УП Международной конференции по ускорителям. Ереван (1969) т.1, стр. 542.
5. K. Huke, Y. Kobayashi, T. Yamakawa, S. Yamaguchi, S. Yamashita. Japan J. Appl. Phys., 7, 1274 (1968).
6. A. M. Maschke, K. L. Symon. Труды Всесоюзного совещания по ускорителям. Москва (1968), т.1, стр. 516.
7. К. П. Мызников, В. М. Татаренко, Ю. С. Федотов. Препринт ИФВЭ, СКУ 70-51, Серпухов (1970).
8. P. Strolin. CERN 69-6, ISR Division, March 1969.
9. Г. Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, 1970 г.
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИФМ, Л.-М., 1963 г.