Краткие сообщения по физике № 3 март 1972

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕНЕРАЦИИ НА НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ ЛИНИИ.2

К. В. Владимирский

В предыдущей статье /I/ рассматривались ограничения устойчивости стационарных режимов спинового генератора или мазера, которые вносятся неоднородным уширением линии рабочего вещества. Задача была сведена к рассмотрению небольшого, конечного числа динамических переменных, что позволило обычными методами получить представление о зависимости устойчивости от параметров и о характере процессов, возникающих за границей области устойчивости. Неоднородное уширение моделировалось дискретным набором резонансных частот. В настоящей заметке неоднородное уширение характеризуется произвольной четной форм-функцией $g(h)$, где h – расстройка, отнесенная к половине естественной ширины линии.

Мы исходим из точной при указанных в /I/ предположениях системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} + p - hq - \varkappa\bar{p}r = 0,\\ &\frac{dq}{dt} + q + hp - \varkappa\bar{q}r = 0,\\ &\frac{dr}{dt} + r + \varkappa(\bar{p}p + \bar{q}q) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

где p, q, r – компоненты вектора ядерной намагниченности в системе координат, вращающейся с ларморовой частотой, чертой обозначены величины, усредненные с весом $g(h)$, $\varkappa$ – безразмерный коэффициент усиления. За единицы выбраны времена релаксации $T_1 = T_2$ и статическая намагниченность M_o.

Уравнения (I) в приведенном здесь виде непосредственно относятся к спиновому генератору. Уравнения для мазера, использующего динамическую поляризацию ядер (в тех же предположениях, $T_1 = T_2$), будут отличаться знаком правой части (Абрагам, /2/). Последующее исследование устойчивости без изменений относится также и к мазеру; внешнее различие сводится к тому, что в случае мазера продольная составляющая ядерной намагниченности r отрицательна.

Стационарное решение системы (I) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= s/(1 + s^2 + h^2), \\ q_0 &= -hs/(1 + s^2 + h^2), \\ r_0 &= (1 + h^2)/(1 + s^2 + h^2), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $s = \varkappa\bar{p}_0$ – амплитуда радиочастотного поля в резонаторе, s^2 – параметр насыщения. Эти величины связаны с коэффициентом усиления соотношением

$$\frac{1}{\varkappa} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(h)dh}{1 + s^2 + h^2}. \qquad (3)$$

Для исследования устойчивости рассмотрим линеаризованную систему уравнений для малых приращений p_1, q_1, r_1

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt} + p_1 - hq_1 - sr_1 - \varkappa r_0\bar{p}_1 = 0, \\ &\frac{dq_1}{dt} + q_1 + hp_1 \qquad - \varkappa r_0\bar{q}_1 = 0, \\ &\frac{dr_1}{dt} + r_1 + sp_1 + \varkappa(p_0\bar{p}_1 + q_0\bar{q}_1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь $\bar{p}_1$, $\bar{q}_1$ – значения p_1, q_1, усредненные с весом $g(h)$. Полагая $p_1 = x\exp(\lambda t)$, $q_1 = y\exp(\lambda t)$, $r_1 = z\exp(\lambda t)$, где λ – постоянная, мы получим систему алгебраических уравнений, связывающую локальные значения переменных со средними по h. Система содержит в качестве параметра λ. Разрешим эту систему относительно x и y. Характеристическое уравнение получается как условие тождественности правой и левой частей полученных равенств после усреднения с весом $g(h)$. В нашем случае, для $g(h)$ четных, характеристическое уравнение, также, как и в /I/, распадается на два. Тождество относительно переменной $\bar{x}$ дает уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 2s^2 - h^2\lambda}{\left[(\lambda + 1)^2 + s^2 + h^2\right](1 + s^2 + h^2)}\, g(h)dh = 0. \qquad (5)$$

Тождество относительно $\bar{y}$ дает аналогичное второе уравнение. Мы его не выписываем здесь, так как оно представляет более слабый критерий устойчивости, чем уравнение (5). Устойчивым состояниям соответствуют решения уравнения (5), имеющие отрицательную действительную часть.

Для условий устойчивости в области больших амплитуд радиочастотного поля s можно получить простое асимптотическое неравенство. Именно, если величина s много больше характерной ширины распределения $g(h)$, то в уравнении (5) можно считать зависимость подынтегрального выражения от h через резонансные множители в знаменателе медленной по сравнению с изменением $g(h)$ и записать характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^2 + \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} h^2 g(h)dh\right)\lambda + 2s^2 = 0,$$

откуда следует условие устойчивости

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2 g(h)dh < 1. \qquad (6)$$

Неравенство (6) представляет обобщение результата, полученного в /I/ для простейших дискретных распределений. Величина, стоящая в левой части неравенства, есть второй момент форм-функции $g(h)$.

Для исследования уравнения (5) при произвольных значениях s применялись приближенные методы. Разложение в степенные ряды позволяет получить аппроксимирующие левую часть уравнения

(5) многочлены и применить критерий Гурвица. Для $s \gg 1$ весьма эффективно использование дискретных функций распределения, аналогичных рассмотренным в /I/

$$g(h) = \sum_i \alpha_i f(h_i - h). \tag{7}$$

Здесь $f(h)$ - дельта-функция Дирака, постоянные α_i, h_i выбираются таким образом, чтобы приравнять первые n моментов функции (7) и точной функции. Этот прием также сводит задачу к исследованию многочлена. Отдельные значения контролировались прямым вычислением чисто мнимых корней уравнения (5).

На рис. I приведены результаты вычислений - границы области устойчивости для ступенчатого распределения

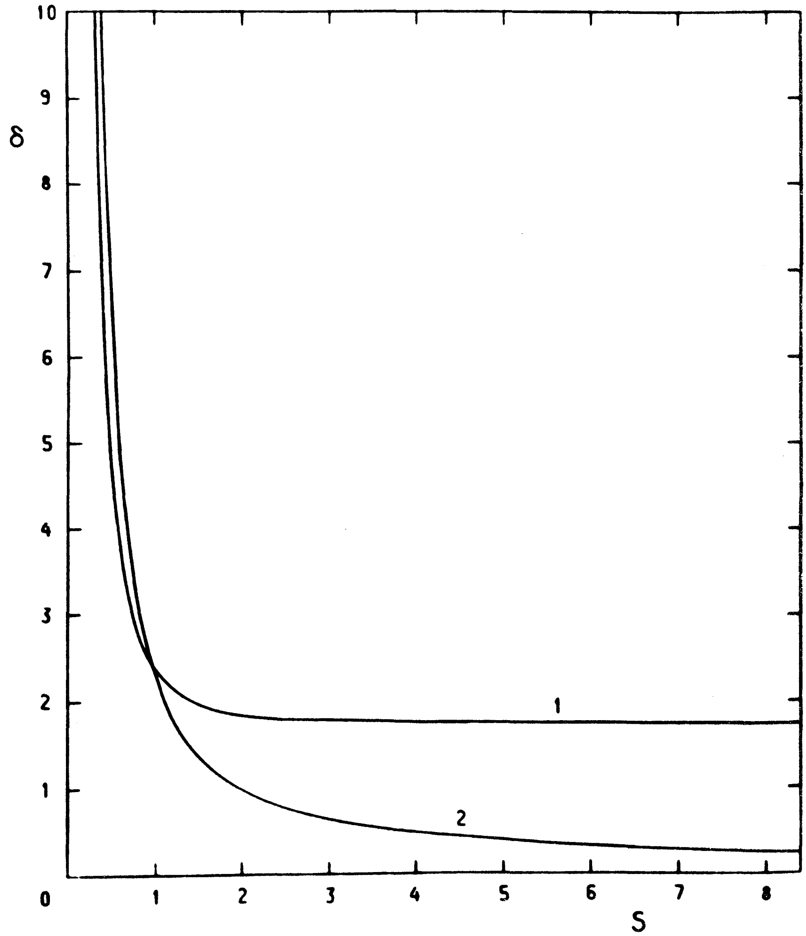
$$g(h) = \begin{cases} 1/2\delta & (|h| \leqslant \delta) \\ 0 & (|h| > \delta) \end{cases} \tag{8}$$

и лоренцова распределения

$$g(h) = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\delta^2 + h^2}. \tag{9}$$

Также, как и для дискретных распределений в /I/, область устойчивости стелется вдоль осей в соответствии с правилом - или сильное поле при малой неоднородности или слабое поле при большой неоднородности. Для качественного понимания результатов вычислений существенно заметить, что при большом неоднородном уширении ($\delta \gg 1$) лишь часть объема рабочего вещества создает поле в резонаторе. Активная часть объема уменьшается с увеличением общей ширины распределения $g(h)$. Этим объясняется, в частности, более быстрое убывание ширины области устойчивости с увеличением параметра δ для распределений (8) и (9) в сравнении с дискретными распределениями, рассмотренными в /I/.

В области больших амплитуд поля в резонаторе все существенное определяется асимптотическим соотношением (6). Для форм-функции (8) граничное значение допустимой неоднородности стремится при увеличении s к конечному пределу $\delta = \sqrt{3}$. Для лоренцова распределения, для которого второй момент $\int h^2 g(h)dh$



Р и с. I. Границы области устойчивости для ступенчатой (I) и лоренцовой (2) форм-функций.

расходится, граничное значение параметра δ в соответствии с (6) стремится при $s \gg 1$ к нулю. Эти результаты показывают, что устойчивость в режиме большой мощности существенно зависит не только от порядка величины неоднородного уширения, но и от конкретного вида форм-функции $g(h)$.

Автор благодарит Е. М. Морозова и А. Е. Самсонова за помощь в программировании численных вычислений.

Поступила в редакцию
20 декабря 1971 г.

Литература

1. К. В. Владимирский. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 41 (1971).
2. А. Абрагам. Ядерный магнетизм, ИИЛ, Москва, 1963 г.