Краткие сообщения по физике № 7 июль 1972

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В НЕПОЛИНОМИАЛЬНО-РАСТУЩИХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

В. Я. Файнберг, В. А. Хлус

В последние годы большое внимание привлекают к себе квантовые теории поля с неполиномиальным ростом матричных элементов или так называемые перенормируемые взаимодействия. Теория возмущений не пригодна при исследовании таких теорий. При выходе за рамки возмущений возникает целый ряд специфических особенностей - неаналитичность по константе связи, экспоненциальный рост в импульсном представлении или существенно особая точка на конусе в x-пространстве, неоднозначность и др. Для анализа этих особенностей необходимо прежде всего выяснить, существуют ли уравнения, которым удовлетворяют ренормированные функции Грина, и установить связь этих уравнений с уравнениями Швингера-Дайсона.

На примере решаемой модели локализуемой теории поля с $L_{B3} = g : \bar{\psi}(x)(\partial\varphi/\partial x^{\mu})\gamma^{\mu}\psi(x):$ мы покажем, что ренормированные функции Грина удовлетворяют в евклидовой области импульсов линейному интегральному уравнению. Это уравнение можно вывести из соответствующих уравнений Швингера-Дайсона переопределением Т-произведения в совпадающих точках (добавлением неопределенных квазилокальных членов (КЛЧ), формальным переходом к евклидовым переменным[ж)], введением обрезания (Λ), отождествлением коэффициентов при КЛЧ с вообще говоря расходящимися интегралами и последующим снятием регуляризации ($\Lambda \to \infty$). При специальном выборе коэффициентов при КЛЧ - минимальная сингу-

---

ж) О возможности формулировки теории в евклидовой области см. /I/, для существенно нелинейных лагранжианов такая формулировка предложена в /2/.

лярность КПЧ – решение интегрального уравнения для одночастичной функции Грина совпадает с решением, найденным в /3,4,5/.

Эта модель исследовалась в работах многих авторов, начиная фактически с работ /7/ [ж]. Ренормированные гейзенберговские операторы спинорного и скалярного полей равны

$$\psi(x) = :\exp[ig\varphi(x)]\,\psi_{in}(x):,$$
$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x), \qquad (1)$$

где $\psi_{in}(x)$ и $\varphi_{in}(x)$ – соответствующие операторы свободных полей. S-матрица в этой модели равна единице, но функции Грина и Вайтмана отличны от свободных. Двухточечная функция Вайтмана $W(x)$ или мнимая часть одночастичной функции Грина $G(x)$ равна

$$W(x) = i\langle 0|\psi(x/2)\bar{\psi}(-x/2)|0\rangle = S^{(-)}(x)\exp\left[-ig^2\Lambda^{(-)}(x)\right] \qquad (2)$$

и является хорошо определенной обобщенной функцией в классе строго локализуемых полей (Джаффе /8/). Задача восстановления

$$G(x) = i\langle 0|T\psi(x/2)\bar{\psi}(-x/2)|0\rangle \qquad (3)$$

по $W(x)$ неоднозначна с точностью до произвольной целой локализуемой функции в p-представлении, так как

$$G'(x) = G(x) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (i\hat{\partial})^{2n+1}\delta^4(x), \quad (C_n = C_n^*) \qquad (4)$$

имеет ту же мнимую часть (2), что и $G(x)$. Аналогично обстоит дело и для функций Вайтмана и Грина высших порядков. Наша цель – вывести интегральное уравнение, которому удовлетворяет $G'(x)$. Используя, например, функциональный метод /1/ (и полагая для простоты массы частиц равными нулю), имеем

$$(f(p^2) = -\hat{p}\tilde{G}'(p)),$$

$$f(p^2) + F(p^2) = Z^{-1} + \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int \frac{(pq) - q^2}{q^2[(p-q)^2 + i\varepsilon]} f(q^2)\,d^4q, \qquad (5)$$

где $F(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(-p^2)^{n+1}$.

ж) Подробный список литературы см. в /6/.

Совершая формальный переход в евклидовую область, интегрируя по угловым переменным и вводя обрезание Λ, находим (см. например, /4/)

$$f(\xi) + F(\xi) = Z^{-1} - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^{\xi} \frac{f(\eta)\eta d\eta}{\xi} - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_{\xi}^{\Lambda}\left[2f(\eta) - \frac{\xi}{\eta} f(\eta)\right]d\eta, \qquad (6)$$

$$\lambda = g/4\pi; \quad \xi = -p^2, \quad \eta = -g^2.$$

При всех $C_n = 0$, $F(\xi) \equiv 0$, это уравнение исследовалось в /4/. В этом случае $f(\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\xi^3 f'''(\xi) + 3\xi^2 f''(\xi) + \lambda^2 \xi f(\xi) = 0. \qquad (7)$$

Можно показать /4/, что никакая линейная комбинация трех линейно независимых решений уравнения (7) не удовлетворяет граничным условиям в нуле $f(0) = 1$ и на бесконечности, вытекающим из интегрального уравнения (6), при $C_n = 0$, $n = 0,1,2..$; таким образом, при каноническом определении T-произведения ($C_n = 0$) интегральное уравнение (6) не имеет решений /4/.

При $C_n \neq 0$ нетрудно преобразовать (6) к виду

$$f(\xi) + A(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi^{n+1} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^{\xi}\frac{f(\eta)\eta d\eta}{\xi} + \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^{\xi} d\eta\left[2f(\eta) - \xi\left(\frac{f(\eta)-1}{\eta}\right)\right] - \frac{\lambda^2}{2}\xi \ln\lambda^2\xi, \qquad (8)$$

причем мы положили

$$A = C_0 - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^{\Lambda}\frac{f(\eta)-1}{\eta} - \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda^2\Lambda,$$

$$Z^{-1} = 1 + \lambda^2\int\limits_0^{\Lambda} f(\eta)d\eta. \qquad (9)$$

Уравнение (8) не содержит Λ и является искомым интегральным уравнением для ренормированной функции Грина. Зависимость C_0

и z^{-1} от Λ всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить (9), а c_n, $n = 1,2\ldots$ и A считать конечными величинами. Выпишем общее решение (8)

$$f(z) = 1 + z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!(n+1)!(n+2)!}\left[\Psi_n + \Psi_{n+1} + \Psi_{n+2} - \ln z\right] +$$

$$+ Bz\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!(n+1)!(n+2)!} + g(z), \tag{10}$$

где B связано с A соотношением: $A = (\lambda^2/2)(3\gamma - 1 - B)$, γ - постоянная Эйлера, $\Psi_n = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1)|_{z=n}$, $z = \lambda^2\eta$;

$g(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} B_n z^n$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, причем B_n выражаются через коэффициенты c_n. Если выбрать A так, чтобы в (10) $B = 0$, т.е. $A = (\lambda^2/2)(3\gamma - 1)$, и положить $c_n = 0$ $(n = 1,2\ldots)$, то (10) перейдет в решение, найденное в /3,4/. Это решение соответствует минимальной сингулярности $(\sim \theta\delta^4(x))$ КЛЧ в (4).

Интересно отметить, что при $c_n = 0$, $n = 1,2\ldots$ и произвольном A (в (8)) дифференциальное уравнение для $f(z)$ совпадает с (7). При $c_n \neq 0$, $n = 1,2\ldots$ справа в (7) появляется неоднородный член. Таким образом мы приходим к выводу, что в этой модели одному и тому же гейзенберговскому оператору ψ в (I) соответствует только один набор функций Вайтмана и бесконечная совокупность наборов функций Грина, различающихся степенью сингулярности в совпадающих точках, но имеющих одну и ту же сингулярность коммутатора в нуле. Каждая из ренормированных одночастичных функций Грина удовлетворяет интегральному уравнению (8) в евклидовой области переменных. Своеобразие ситуации в том, что уравнения Швингера-Дайсона не накладывают дополнительных ограничений и вообще говоря, не дают возможность выделить единственное решение из всей совокупности.

Проведенное исследование наводит на общую мысль о том, что в отличие от концепции, развиваемой в /4,6/, по-видимому, для всех локализуемых квантовых теорий поля существует такое доопределение Т-произведения ренормированных гейзенберговских операторов, которое позволяет "вывести" из уравнений Швингера-Дайсона математически корректное интегральное уравнение для ренормированных функций Грина в евклидовой области переменных.

Поступила в редакцию 15 февраля 1972 г.
После переработки 3 апреля 1972 г.

Литература

1. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 258 (1955).
2. Е. С. Фрадкин. Nucl. Phys., 49, 264 (1963); Г. В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2105 (1963).
3. М. К. Волков. Труды международного совещания по нелокальной квантовой теории. Дубна, 1967 г.
4. А. Т. Филиппов. Докторская диссертация, Дубна, 1969 г.; B. A. Arbuzov, A. T. Fillippov. Nuovo Cim., 38, 2796 (1969).
5. H. Lehmann and K. Pohlmeyer, preprint DESY 70/26 (1970).
6. Б. С. Гетманов, А. Т. Филиппов. ТМФ, 8, 3 (1971).
7. S. Okubo. Progr. Theor. Phys., 11, 80 (1954); Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 258 (1955).
8. A. M. Jaffe. Phys. Rev., 158, 1454 (1967).