Краткие сообщения по физике № 11 ноябрь 1972

О ВЛИЯНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА ДИНАМИКУ ЧАСТИЦ ПРИ МЕДЛЕННОМ ВЫВОДЕ

Ю. А. Башмаков

Для осуществления медленного вывода частиц на одном из нелинейных резонансов радиальных бетатронных колебаний $\nu = m/3$ или $\nu = m/4$ необходима m-ая гармоника соответственно квадратичной или кубической нелинейности магнитного поля. Однако поддержание квадратичной или кубической зависимости магнитного поля по радиусу во всей рабочей области ускорителя довольно сложно. В работах /I,2/ обсуждалась возможность использования для медленного вывода на резонансе третьего порядка магнитного поля со "спрямленной" нелинейностью. В настоящей работе мы остановимся на подробном анализе динамики частиц при использовании полей, отличных от квадратичного или кубического, для вывода на резонансах соответственно третьего и четвертого порядка.

Резонанс четвертого порядка $\nu = m/4$

Возможность медленного вывода на резонансе четвертого порядка рассматривалась в работах /3,4/. Здесь мы остановимся на динамике частиц вблизи резонанса $\nu = m/4$ при наличии m-ой резонансной гармоники магнитного поля в медианной плоскости

$$B_m = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial x^3}\right)_m x^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\partial^5 B}{\partial x^5}\right)_m x^5, \qquad (I)$$

причем будем считать $(\partial^3 B/\partial x^3)_m > 0$, $(\partial^5 B/\partial x^5)_m < 0$.

В нормализованной системе единиц /5,6/ уравнение движения в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + \left[\left(\frac{m}{4}\right)^2 - \delta\right]\eta = -(A\eta^3 - D\eta^5)\cos m\phi, \qquad (2)$$

где η – нормализованная координата, $\phi = \int (ds/\nu\beta)$, s – расстояние вдоль равновесной орбиты, $\beta(s)$ имеет обычный смысл, $A = \nu(\partial^3 B/\partial x^3)_m \beta^3/3!B_o\rho$, $D = -\nu(\partial^5 B/\partial x^5)_m \beta^4/5!B_o\rho$, B_o – индукция ведущего магнитного поля, ρ – кривизна траектории в ведущем магнитном поле и $\delta = (m/4)^2 - \nu^2$ – расстройка. Решение уравнения (2) в первом приближении, найденное по методу Боголюбова-Митропольского /7/, записывается в виде

$$\eta = a(\phi)\cos\left[\frac{m}{4}\phi + \psi(\phi)\right] \tag{3}$$

с амплитудой a и фазой ψ, зависящими от азимута

$$\frac{da}{d\phi} = \frac{1}{4m} Aa^3\left(1 - \frac{D}{A}a^2\right)\sin 4\psi,$$
$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{1}{4m} Aa^2\left(1 - \frac{3}{2}\frac{D}{A}a^2\right)\cos 4\psi - \frac{4\delta}{2m}. \tag{4}$$

В переменных действие – фаза уравнения движения (4) принимают каноническую форму

$$\frac{dI}{d\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \qquad \frac{d\psi}{d\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} \tag{5}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{8m} AI^2\left(1 - \frac{D}{A} I\right)\cos 4\psi - 2\frac{\delta}{m} I, \tag{6}$$

где $I = a^2$. Движение происходит по траекториям $H = const$

$$\cos 4\psi = \frac{8mH + 2I_o I}{I^2\left(1 - \frac{D}{A} I\right)}. \tag{7}$$

Здесь $I_o = a_o^2 = 8\delta/A$. Из (4) видно, что движение в центральной части рабочей области, где $a^2 \ll A/D$, по существу не отличается от движения в кубическом поле. Но при $a^2 \simeq A/D$ наличие дополнительной нелинейности становится весьма существенным. На рис. I построены кривые $\cos 4\psi$ в зависимости от a для различных H для случая $a_o = 1$ см, $D/A = 10^{-2}$ см$^{-2}$. Движению соответствует $|\cos 4\psi| < 1$. Наличие в (7) особенности приводит к появлению граничной амплитуды $a_{гр} = \sqrt{A/D}$.

При выполнении условия $a_0 \ll \sqrt{A/D}$ условие раскачки частиц имеет вид

$$a > a_0 \tag{8}$$

и совпадает с условием раскачки в кубическом поле. Пусть η_s –

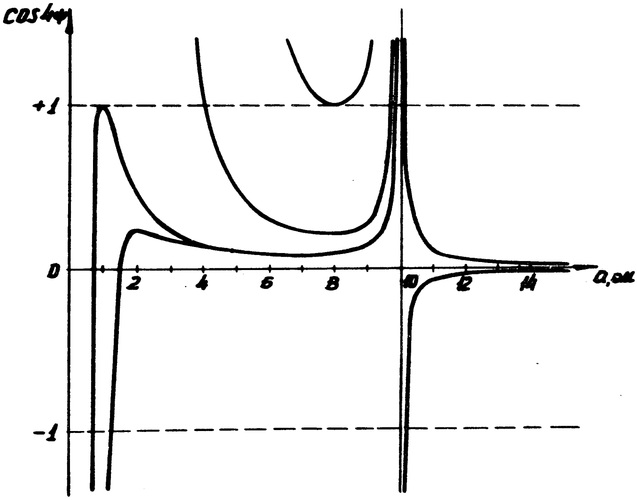

Рис. I.

координата токовой нити выводного магнита и $a_0 < \eta_s \le 0{,}7\sqrt{A/D}$, тогда $\sin 4\varphi \approx 1$, а закон изменения амплитуды

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{1}{4m} A a^3 \left(1 - \frac{D}{A} a^2\right). \tag{9}$$

При этом угловой разброс частиц на входе в выводной магнит увеличивается лишь незначительно. Если выводной магнит помещен вблизи максимума магнитного поля $\eta_s = \sqrt{3A/5D}$, то

$$da/d\varphi = Aa^3/10m. \tag{10}$$

Таким образом, при заданной величине шага и, следовательно, магнитной индукции в районе выводного магнита использование полей типа (I) позволит более чем вдвое поднять величину нелинейности в центре рабочей области, что облегчит раскачку частиц с малыми амплитудами.

Резонанс третьего порядка $\nu = m/3$

Остановимся на динамике частиц вблизи резонанса третьего порядка $\nu = m/3$ при наличии m-ой гармоники магнитного поля вида

$$B_m = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right)_m x^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4 B}{\partial x^4}\right)_m x^4, \qquad (11)$$

причем $(\partial^2 B/\partial x^2)_m > 0$, $(\partial^4 B/\partial x^4)_m < 0$. В этом случае уравнения движения записываются в виде

$$\eta = a(\phi)\cos\left[\frac{m}{3}\phi + \psi(\phi)\right], \qquad (12)$$

$$\frac{da}{d\phi} = \frac{3}{8m} Ea^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{F}{E}a^2\right)\sin 3\psi,$$

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{3}{8m} Ea\left(1 - \frac{5}{4}\frac{F}{E}a^2\right)\cos 3\psi - \frac{3}{2m}\delta. \qquad (13)$$

Здесь $E = \nu(\partial^2 B/\partial x^2)_m \beta^{5/2}/2!B_0\rho$, $F = -\nu(\partial^4 B/\partial x^4)_m \beta^{7/2}/4!B_0\rho$, $\delta = (m/3)^2 - \nu^2$. Эти уравнения движения можно переписать в канонической форме с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{4m} EI^{3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{F}{E}I\right)\cos 3\psi - \frac{3}{2m}\delta I. \qquad (14)$$

Анализ движения проводится аналогично предыдущему случаю. Основной вывод состоит в том, что и в случае резонанса третьего порядка использование модифицированных полей типа (11) облегчает выполнение условия раскачки для частиц с малыми амплитудами и поддержание заданной формы поля во всей рабочей области ускорителя.

Поступила в редакцию
15 сентября 1972 г.

Литература

1. A. Turrin, Nuovo Cimento, 8, 511 (1958).
2. А. В. Гальчук, Б. С. Мингалев, Ю. П. Сивков, Х. А. Симонян. Труды VII Международной конференции по ускорителям. Ереван, 1969 г., т. I, стр. 518.

3. Ю. А. Башмаков, К. А. Беловинцев. Краткие сообщения по физике № I, I8 (I972).
4. Ю. А. Башмаков, К. А. Беловинцев. Препринт ФИАН № I05, I972 г.
5. P. Strolin. CERN 69-6, ISR Division, March 1969.
6. M. Month, E. D. Courant. Particle Accelerators, 2, 105 (1971).
7. И. И. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИФМЛ, Л.-М., I963 г.