

УДК 535.37, 631.378.35

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР В АКТИВНОМ ОПТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

А. Ю. Окулов

Нелокальное уравнение для параметра порядка в нелинейном оптическом резонаторе сведено в пределе большого числа Френеля к уравнению Свифта–Хоэнберга. Получены точные солитонные и периодические решения уравнения Свифта–Хоэнберга для оптического резонатора с тонким слоем усиливающей среды. Показано, что для поперечно-одномерных пространственных структур решения в форме гиперболического секанса с “чирпом” и в форме эллиптических функций Якоби являются нелинейными собственными модами в плоскопараллельной, квазиконфокальной и конфокальной геометрии.

Локализованные структуры излучения в нелинейных оптических резонаторах, обладающие солитонными свойствами, являются объектом интенсивных исследований на протяжении предшествующих лет [1 – 5]. Для режима синхронизации продольных мод в лазере с нелинейным поглотителем Г. Хаусом [1] предложена точно решаемая модель, принимающая во внимание не только взаимную компенсацию нелинейности поглотителя и дисперсии коэффициента усиления, но также и баланс усиления и потерь, и было получено точное решение в форме гиперболического секанса. В случае пассивного мультистабильного резонатора Фабри–Перо, инжектируемого через одно из зеркал монохроматической волной [2], модифицированным методом обратной задачи получено точное решение в форме гиперболического секанса на фоне плоской волны. Альтернативный подход, рассматривающий локализованные структуры как связанные состояния волн переключения между различными ветвями гистерезисной характеристики резонатора, развивался в работах [3]. Возможность построения точных решений, описывающих синхронизацию поперечных мод в нелинейном кольцевом конфокальном резонаторе

с усилением, была указана в работе [4]. Задача анализировалась в модели нелокального по пространственным координатам уравнения для параметра порядка (комплексной амплитуды электромагнитного поля) следующего вида:

$$E_{n+1}(\vec{r}, z) = \int \int K(\vec{r} - \vec{r}', z) f[E_n(\vec{r}'_{\perp})] d^2 \vec{r}', \quad (1)$$

где $E_{n+1}(\vec{r})$ – комплексная амплитуда электромагнитного поля в резонаторе, $f[E_n(\vec{r}'_{\perp})]$ – комплексная передаточная функция активного слоя, n – номер прохода через резонатор. Для кубической нелинейности (двухуровневая система в стационарном режиме) было получено решение в форме гиперболического секанса $\text{sech}(x)$, в то время как для квадратичной нелинейности (внутрирезонаторная генерация второй гармоники) решение имело вид гиперболического секанса в квадрате $\text{sech}^2(x)$. Следует отметить, что такие решения обладают более слабой локализацией, чем решения в виде линейной суперпозиции когерентных состояний, представляющие собой гауссовы волновые пакеты [5], осциллирующие в плоскости выходных зеркал:

$$E(x, y, t) = E_0 \exp[-(x - x_0 \cos(\Omega t))^2] / \sqrt{\pi}. \quad (2)$$

Это выражение было записано для одномерно-поперечной геометрии резонатора, причем считалось, что данный волновой пакет образован дискретным набором мод Гаусса-Эрмита: $E(x, y, t) = \sum_n A_n \exp[-x^2 - i\omega_n t](H_n/N_n) + \text{к.с.}$, где коэффициенты даются выражением $N_n = (2^n n! \sqrt{\pi})$ и имеет место пуассоновское распределение амплитуд мод $A_n = \bar{n}^n \exp[-\bar{n}] / n!$.

Устойчивость локализованных решений [4] в виде гиперболического секанса для конфокального активного резонатора рассматривалась в [6], где в явном виде были получены инкременты нарастания возмущений и показано, что среди возмущений такого солитона существуют моды с положительными инкрементами нарастания во времени, что является признаком неустойчивости решений, полученных в данной модели. Однако численное моделирование и экспериментальные результаты [7] свидетельствуют об устойчивости локализованных конфигураций в данной геометрии резонатора.

В ряде работ указывалось на то обстоятельство, что учет нелокальности нелинейности как в явном виде [8], так и за счет введения пространственной дисперсии более высокого порядка [9], позволяет получить устойчивые солитонные решения. В данной работе развивается подход, примененный в работе [4], использующий уравнение для

комплексной амплитуды электромагнитного поля с нелокальностью, обусловленной граничными условиями, и реализуется обобщение этого уравнения на случай резонатора с плоскопараллельными зеркалами.

Вариационная формулировка. Хорошо известно, что уравнение для параметра порядка Ψ в теории Гинзбурга–Ландау [10]

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\perp} \Psi = a\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 \quad (3)$$

можно получить из вариационного принципа. Для получения нестационарного уравнения, определяющего поведение комплексной амплитуды, воспользуемся формальной аналогией с уравнением, полученным в [11, 12], где временная производная Ψ определяется вариационной производной от функционала свободной энергии Φ

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\delta \Phi}{\delta \Psi}, \quad (4)$$

который для уравнения (3) имеет вид:

$$\Phi = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{|\nabla \Psi|^2}{2} - \frac{\alpha|\Psi|^2}{2} - \frac{\beta|\Psi|^4}{4} - \frac{\gamma|\Psi|^6}{6} \right\} dV. \quad (5)$$

Аналогичным образом для нелокального уравнения (1) имеем следующий функционал свободной энергии:

$$\begin{aligned} \Phi_{N_{eloc}}(z) = & \int \int \{ [K(\vec{r} - \vec{r}', z) E_n(\vec{r}'_{\perp}) E_n^*(\vec{r}_{\perp}) + K^*(\vec{r} - \vec{r}', z) E_n^*(\vec{r}'_{\perp}) E_n(\vec{r}_{\perp})] d^2 \vec{r}' \} d^2 \vec{r} \\ & - \int \left\{ \frac{\alpha|\Psi|^2}{2} + \frac{\beta|\Psi|^4}{4} + \frac{\gamma|\Psi|^6}{6} \right\} d^2 \vec{r}, \end{aligned}$$

а временная эволюция дается уравнением, где роль параметра порядка играет комплексная амплитуда $E_{n+1}(\vec{r})$, а “дискретное время” n измеряется в единицах времени прохода излучения через резонатор ($2L_R/c$):

$$E_{n+1}(\vec{r}, z) = -\frac{\delta \Phi_{N_{eloc}}}{\delta E_n}. \quad (6)$$

Отличие уравнения в форме (6) от стандартного приближения “среднего” поля [13] в том, что ядро $K(\vec{r} - \vec{r}', z)$ содержит “продольную” координату z и позволяет просчитать распределение комплексной амплитуды $E_n(\vec{r}, z)$ в любой плоскости внутри резонатора [14].

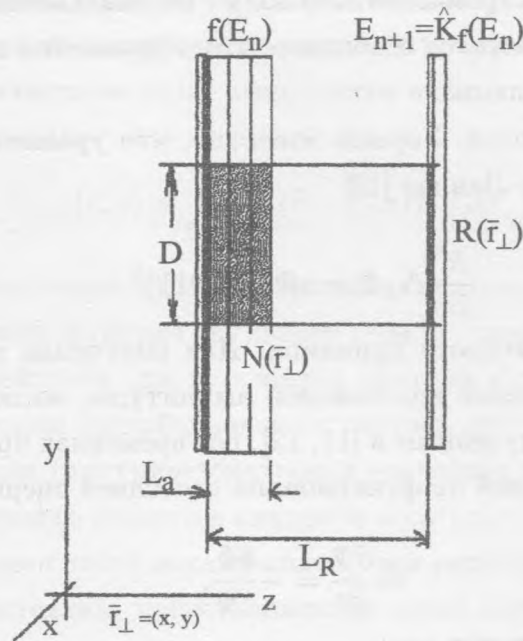


Рис. 1. Геометрия резонатора Фабри-Перо с тонким слоем усиливающей среды. Пояснения и обозначения в тексте.

Уравнение для комплексной амплитуды с учетом граничных условий. Рассмотрим распределение в оптическом резонаторе с тонким слоем нелинейной среды (рис.1), описываемой в двухуровневом приближении нелинейной передаточной функцией:

$$f(E_n) = E_n \frac{\sigma N_0(\vec{r}) L_a (1 - i\Delta\omega T_2)}{2(1 + \sigma T_1 |E_n|^2)} + E_n, \quad (7)$$

где σ – сечение вынужденного усиления, N_0 – плотность инвертированных атомов, $\Delta\omega$ – отстойка частоты моды от центра линии усиления, T_2 – обратная ширина однородной линии, T_1 – время жизни верхнего резонансного уровня, c – скорость света, L_a – толщина активной среды ($L_a \ll L_R$). Необходимое условие применимости уравнения (7) имеет вид $L_a \ll kD^2$, где D – характерный размер поперечной неоднородности в плоскости $\vec{r} = (x, y)$ (рис.1) параметров резонатора (например, поперечный размер области высокого коэффициента отражения $R(\vec{r})$ или инверсной населенности $N_0(\vec{r})$). Распространение излучения в свободном пространстве между зеркалами будем рассматривать в параксиальном приближении теории дифракции в интегральной форме:

$$E_{n+1}(\vec{r}, z) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \exp\left\{\frac{ik(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2z}\right\} f(E_n(\vec{r}') d^2\vec{r}',$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, L_R – длина резонатора. Функция “поперечных” координат (“коэффициент отражения входного зеркала”) $0 \leq R(\vec{r}) \leq 1$ описывает ограничение излучения в поперечном сечении. Кривизна зеркал учитывается стандартным фазовым множителем вида: $\exp\left\{\frac{ik\vec{r}'^2}{2F}\right\}$, где F – фокусное расстояние. В приближении “короткого резонатора” или малой длины волны ($k = (2\pi/\lambda) \rightarrow \infty$) можно получить динамическое уравнение для комплексного поля $E_n(\vec{r}, z)$ методом, изложенным в работе [4], с учетом членов разложения вплоть до второго порядка малости:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{c(1-R)E}{2L_R} + \frac{ic}{2k} \Delta_{\perp} E = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c(1 - i\Delta\omega T_2)}{L_R(1 + \sigma T_1 |E_n|^2)}. \quad (8)$$

Такое уравнение для параметра порядка $E(\vec{r}_{\perp})$ обычно называют параболическим уравнением [13].

Покажем, что учет граничных условий можно провести в явном виде. Будем считать для упрощения расчетов, что коэффициент отражения выходного зеркала представляет собой функцию Гаусса:

$$R(x, y) = R_0 \exp\{-(x^2 + y^2)/D^2\}; \quad 0 \leq R_0 \leq 1.$$

В первом порядке по обратному числу Френеля $N_F = kD^2/L_R$ имеем уравнение Гинзбурга–Ландау с комплексными коэффициентами:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{\tau_R} + \frac{ic}{2k} \Delta_{\perp} E(1 - i/N_F) = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c(1 - i\Delta\omega T_2)}{L_R(1 + \sigma T_1 |E_n|^2)}, \quad (9)$$

где $\tau_R = \frac{c(1-R)E}{2L_R}$ – “время жизни” фотона в резонаторе. Физический смысл “диффузионной” добавки, пропорциональной $1/N_F$, заключается в том, что излучение, дифрагирующее из центральной части, поглощается на краях диафрагмы. Во втором порядке по $1/N_F$ уравнение усложняется из-за переменных коэффициентов перед второй производной:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{\tau_R} + \frac{ic}{2k} \Delta_{\perp} E(1 - i/N_F - 2(x^2 + y^2)/(N_F^2)) = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c(1 - i\Delta\omega T_2)}{L_R(1 + \sigma T_1 |E_n|^2)}. \quad (10)$$

Тем не менее, для центральной части резонатора этой зависимостью можно пренебречь. Для симметричной диафрагмы отличны от нуля лишь четные коэффициенты M_{2n} . Таким образом, можно получить уравнение Свифта–Хоэнберга любого порядка для “безынерционной” нелинейности, т.е. двухуровневой системы в стационарном режиме. Приведем выражение для уравнения Свифта–Хоэнберга 8-ого порядка с “насыщающейся” нелинейностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + M_0 E + M_2 \Delta_{\perp} E + M_4 \Delta_{\perp}^2 E + M_6 \Delta_{\perp}^3 E + M_8 \Delta_{\perp}^4 E = \\ = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c (1 - i \Delta \omega T_2)}{L_R (1 + \sigma T_1 |E_n|^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты M_0, M_2, M_4 имеют для гауссовой диафрагмы следующий вид:

$$M_0 = \tau_R^{-1} \exp\{-(x^2 + y^2)/(D^2(1 - i/N_F))\} (1 - i/N_F)^{-1/2}, \quad (12)$$

$$M_2 = \frac{ic}{2k\tau_R} (1 - i/N_F)^{-2} (-1) \{1 - i/N_F - 2(x^2 + y^2)k/(N_F^2 L_R)\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_4 = -\frac{3cL_R}{2k^2\tau_R} (1 - i/N_F)^{-4} (24L_R/k) \{3 - i12/N_F - 12/N_F^2 - 24i/N_F^2 - \\ - 48k(x^2 + y^2)/(L_R N_F^3) - 16(x^4 + y^4)k^2/L_R^2(N_F^4)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует отметить, что при выводе выражений (12) – (14) для сокращения записи формул предполагалось, что зеркала – плоские, т.е. F равно бесконечности, хотя моменты вычисляются точно и в этом, более общем случае. Далее, заметим, что возможен также предельный переход, геометрически соответствующий бесконечно широкой диафрагме ($D \rightarrow \infty$), что в определенном смысле аналогично взятию интеграла в смысле “главного значения”. При этом из моментов M_{2n} “выпадает” зависимость от поперечных координат x, y , а зависимость моментов M_{2n} от характерного параметра малости $\frac{z}{k}$ приобретает следующий вид: $M_{2n} \approx \left(\frac{z}{k}\right)^n$. Приведем также первые ненулевые “регуляризованные” коэффициенты в разложении по степеням нелокального оператора \hat{K} по степеням $\frac{z}{k}$:

$$M_0 = \tau_R^{-1}; \quad M_2 = \frac{ic}{2k\tau_R}; \quad M_4 = -\frac{3cL_R}{2k^2\tau_R}; \quad M_6 = \frac{15icL_R^2}{2k^3\tau_R}; \quad M_8 = -\frac{105icL_R^3}{2k^4\tau_R}.$$

Точные локализованные решения. Точное решение для уравнения Гинзбурга–Ландау (9) с кубичной нелинейностью



Рис. 2. а) Распределение интенсивности солитона с “чирпом”. Масштаб по оси x в микро-нах. б) Распределение фазы.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{\tau_R} + \frac{ic}{2k} \Delta_{\perp} E (1 - i/N_F) = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c (1 - i\Delta\omega T_2)}{L_R} (1 - \sigma T_1 |E_n|^2) \quad (15)$$

получается методом, описанным в работах Ахмедиева и Анкевича [15, 16]. В общем виде оно представляет собой солитон с “чирпом” и “пьедесталом”:

$$E(x, t) = \chi \{ \text{sech}(\chi x) \exp(i\xi \text{Log}[\text{sech}(\chi x)]) + \theta \} \exp(i\Omega t).$$

Графики этого решения приведены на рис.2 (а, б). Приведем зависимость от параметров резонатора для решения в виде “плоского” солитона:

$$E(x, t) = E_0 \text{sech}(\chi x) \exp(i\Omega t). \quad (16)$$

Амплитуда солитона $E_0 = \chi \sqrt{c/\sigma T_1 2kGN_F}$ обратно пропорциональна пространственному размеру солитона χ , частота $\Omega = G\Delta\omega T_2 (1 - c\chi^2/(4kN_F G))$, превышение над порогом $G - \gamma = cL_a \chi^2 / (4L_R k N_F)$, $\gamma = (1 - R_0)(c/2L_R)$. Периодические решения имеют следующий вид при аналогичном соотношении параметров:

$$E(x, t) = E_0 \text{sn}(\chi x, q) \exp(i\Omega t). \quad (17)$$

Двумерный “светлый” солитон для двумерного в поперечном сечении уравнения Гинзбурга–Ландау (т.е. размерности $2 + 1$) описывается точным решением, полученным в работе [17]. Фактически, данное решение соответствует одномерному “повернутому” (в плоскости x, y) солитону с волновым вектором, чья ориентация определяется

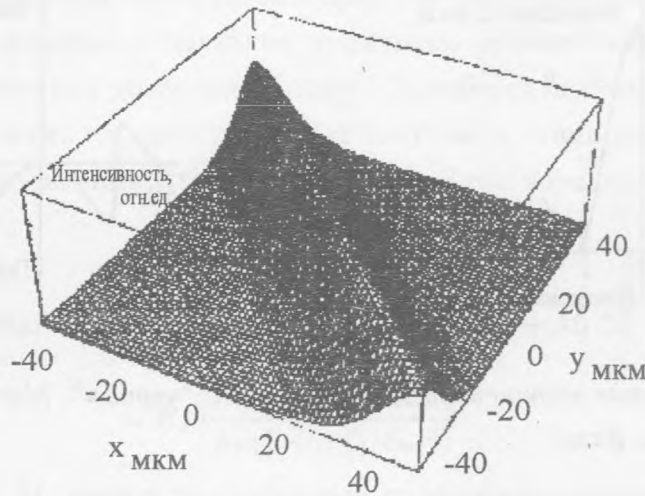


Рис. 3. Точное двумерное решение уравнения Гинзбурга–Ландау в пространстве размерности $(2 + 1)$.

соотношением констант α, β, ζ, B , которые являются свободными параметрами задачи при очевидном условии $\alpha/\beta = \chi$ (рис.3). При этом скорость движения солитона в плоскости x, y определяется частотой Ω :

$$E(x, y, t) = \frac{E_0}{(B + ch(\alpha x + \beta y + \Omega t + \zeta))} \exp(i(\alpha x + \beta y + \Omega t)). \quad (18)$$

Рассмотрим теперь локализованное решение уравнения Свифта–Хоэнберга 4-го порядка:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{\tau_R} + M_0 E + M_2 \Delta_{\perp} E + M_4 \Delta_{\perp}^2 E = E_n \frac{\sigma N_0 L_a c (1 - i \Delta \omega T_2)}{L_R (1 + \sigma T_1 |E_n|^2)}, \quad (19)$$

Решение в этом случае имеет близкий вид, но соотношение между параметрами следующее:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sech}(\chi x)^2 \exp(i \Omega t). \quad (20)$$

Амплитуда солитона $E_0 = 6\chi = \frac{15}{4} \frac{k N_F}{L_a} (G - \gamma)$ увеличивается при уменьшении его ширины $\chi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{10 k N_F (G - \gamma)}{L_R}} - \frac{k D}{L_R} \sqrt{\frac{10 (G - \gamma)}{8}}$.

В данной работе нелокальное уравнение для параметра порядка сведено к уравнениям Гинзбурга–Ландау и Свифта–Хоэнберга в пространстве размерности $(2+1)$. Получены точные решения в виде гиперболических и эллиптических функций. Эволюционные

уравнения учитывают дифракционные потери в виде разложения по малому параметру, роль которого играет обратное число Френеля резонатора $N_F^{-1} = (kD^2/L_R)^{-1}$. Полученные динамические уравнения для амплитуды электромагнитного поля параметра порядка являются обобщением уравнения Сучкова [13] на случай ненулевых дифракционных потерь.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H a u s H. A. J. Appl. Phys., **46**, 3049 (1975); X a y c X. "Волны и поля в оптоэлектронике". М., Мир, 1988.
- [2] M c L a u g h l i n D. W., M o l o n e y J. V., and N e w e l l A. C. Phys. Rev. Lett., **51**, 75 (1983); A d a c h i h a r a H. A., M c L a u g h l i n D. W., M o l o n e y J. V., and N e w e l l A. C. J. Math. Phys., **29**, 63 (1988).
- [3] Р о з а н о в Н. Н., Х о д о в а Г. В. Оптика и спектроскопия, **65**, 449 (1988); R o s a n o v N. N. and K h o d o v a G. V. JOSA, **В7**, N 6, 1057 (1990).
- [4] О к у л о в А. Ю., О р а е в с к и й А. Н. Труды ФИАН, **187**, 202 (1988).
- [5] A u s t o n D. IEEE J. QE-4, 420 (1968).
- [6] О к у л о в А. Ю. Оптика и спектроскопия, **89**(1), 145 (2000).
- [7] T a r a n e n k o V. B., S t a l i u n a s K., and W e i s s C. O. Phys. Rev., **A56**, 1582 (1997); S t a l i u n a s K., T a r a n e n k o V. B., S l e k u s G., et al., Phys. Rev., **A57**, 599 (1998).
- [8] B a n g O., K r o l i k o w s k i W., N i k o l o v N., and N e s h e v D. Phys. Rev., **E68**, 036614 (2003).
- [9] S t a l i u n a s K. and W e i s s C. O. JOSA, **В12**, 1142 (1995).
- [10] Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П. "Статистическая физика", ч. 2, гл.4, М., Наука, 1978.
- [11] A r a n s o n I. S., G o r s h k o v K. A., L o m o v A. S., and R a b i n o v i t c h M. I. Physica, **D43**, 435 (1990).
- [12] L i k h a n s k y V. V. and K o z l o v S. N. Laser Physics., **3**, N 6, 1067 (1993).
- [13] С у ч к о в А. Ф. ЖЭТФ, **49**, вып. 5(11), (1965).
- [14] О к у л о в А. Ю. Оптика и спектроскопия, **77**(6), 985 (1994).
- [15] A k h m e d i e v N., A n k i e w i c z A., and M a r u n o K. Physica, **D176**, 44 (2003).

- [16] Akhmediev N. and Ankiewicz A. "Solitons, nonlinear pulses and beams". Chapman & Hall, London, 1997.
- [17] Yomba E. and Kofane T. C. Chaos, Solitons and Fractals, **20**, no.5, 1135 (2004).

Поступила в редакцию 25 июня 2004 г.