

УДК 537.52

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ НАТЯЖЕНИЯ

Е. М. Юрков, С. И. Яковленко

*Проведено рассмотрение устойчивости цилиндрической полости в жидкости в случае, когда имеет место не поверхностное натяжение, а поверхностное расталкивание. Такая ситуация может иметь место за счет возникновения поверхностного заряда на границе плазмы с жидкостью, что использовано для объяснения механизма образования цепочки каверн при лазерном разрушении световода. Проведенное рассмотрение показывает, что (в отличие от случая поверхностного натяжения, рассмотренного Рэлеем) при отрицательном коэффициенте натяжения цилиндрическая поверхность неустойчива относительно всех мод, кроме аксиально-симметричной моды. Аксиально-симметричная мода неустойчива относительно возмущений с длиной волны меньшей окружности поперечного сечения полости и устойчива относительно возмущений с длиной волны большей окружности поперечного сечения полости.*

Уже 17 лет исследуется волна разрушения, распространяющаяся навстречу лазерному излучению в волоконных световодах [1 – 11]. Эту волну обычно инициируют локальным сторонним нагревом или прикосновением конца световода к поверхности, поглощающей лазерное излучение. Если на каком-либо участке волокна повышен коэффициент поглощения, то в этом месте происходит нагрев, который приводит к дальнейшему повышению поглощения. Теплопроводность обеспечивает продвижение такой тепловой волны поглощения (ТВП) навстречу лазерному излучению [3, 4, 11].

Наибольший интерес вызывает то обстоятельство, что после прохождения ТВП часто формируется периодическая структура из каверн (пустот) размерами порядка нескольких микрон с расстоянием между кавернами порядка десяти микрон. Долгое время не было понимания того, какими физическими процессами обусловлено это явление. В работе [12] сделана попытка объяснить механизм формирования цепочки каверн рэлеевской капиллярной неустойчивостью [13, 14]. Однако в работах [15, 16] показано, что из-за аномально большой вязкости кварцевого стекла (превосходящей более чем на шесть порядков вязкость жидких металлов и солей) это объяснение несостоятельно. Там же указан принципиально новый механизм неустойчивости, связанный с формированием слоя электрического заряда на поверхности, разграничивающей жидкую фазу стекла и плазму.

Ввиду расталкивания одноименных зарядов поверхность стремится увеличиться, что обеспечивает развитие неустойчивости, приводящей к образованию цепочки каверн. Показано, что, если пренебречь гравитацией, то в плоском случае дисперсионное уравнение при поверхностном расталкивании всегда приводит к мнимой частоте колебаний. Близкая по духу неустойчивость, обусловленная поверхностным зарядом жидкого проводника, рассмотрена Я. И. Френкелем в 1935 году (см. [17, с. 55]). Однако ввиду того, что заряды по проводнику движутся свободно, неустойчивость Френкеля возникает за счет нормальных, а не тангенциальных сил и, соответственно, характеризуется несколько иным дисперсионным соотношением.

В данной работе определены условия неустойчивости цилиндрической полости в случае не плоской, а цилиндрической геометрии при отрицательном коэффициенте натяжения. Вязкость не учитывается, поскольку она может лишь замедлить формирование неустойчивости, но не может сделать неустойчивую моду устойчивой. Время развития неустойчивости с учетом вязкости будет предметом отдельной работы.

## Постановка задачи

*Исходные уравнения.* Рассмотрим бесконечную цилиндрическую полость, окруженную жидкостью. Ниже используется подход, подробно изложенный в [14]. Наличие неустойчивости демонстрируется на основе дисперсионного уравнения, учитывающего зависимость инкремента нарастания  $\gamma$  малого возмущения, пропорционального  $e^{\gamma t}$ , от волнового числа  $k$ . Если при каких-то значениях  $k$  величина  $\gamma$  становится положительной, то любое малое начальное возмущение будет нарастать со временем, приводя к

неустойчивости. Получение искомого дисперсионного соотношения основывается на системе гидродинамических уравнений для малых радиальных отклонений от равновесия цилиндрической полости в жидкости.

Будем исходить из следующей системы уравнений для несжимаемой жидкости [18, с. 73]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \Pi, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость;  $\Pi = \delta p / \rho$  – удельное давление,  $\delta p$  – отклонение давления от равновесного значения,  $\rho$  – плотность. Для рассматриваемых ниже малых возмущений пренебрегается величинами, квадратичными по скорости  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ . Гравитационными силами также пренебрегается.

Далее рассмотрим развитие малой радиальной деформации  $\xi(t, z, \varphi)$  поверхности цилиндрической полости:

$$r = R + \xi(t, z, \varphi), \quad \xi(t, z, \varphi) = \varepsilon(t) \cdot e^{i(kz + m\varphi)}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \varepsilon^{\gamma t}, \quad (2)$$

где  $R$  – радиус невозмущенного цилиндра;  $\varepsilon_0$  – амплитуда возмущения;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число возмущения в  $z$ -направлении ( $\lambda$  – длина волны возмущения);  $m$  – целое число, характеризующее аксиальную моду возмущения;  $\gamma$  – инкремент нарастания возмущения.

*Граничные условия.* Проследив вывод формулы Лапласа [18, с. 334], можно убедиться, что в случае поверхностного расталкивания (а не натяжения) выражение для разности давлений вблизи искривленной поверхности раздела для двух неподвижных сред (1 и 2) остается прежним. Следует только изменить знак коэффициента поверхностного натяжения  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . В результате имеем:

$$p_1 - p_2 = \alpha \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3)$$

Здесь  $p_1$  – давление внутри жидкого стекла;  $p_2$  – давление внутри полости;  $\alpha = |\alpha|$  – коэффициент поверхностного расталкивания;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности (они считаются положительными, когда направлены внутрь полости). При этом давление внутри жидкости больше, чем в полости, в отличие от случая поверхностного натяжения, когда больше давление в полости.

## Условия устойчивости и неустойчивости

Связь давления с характеристиками возмущения. Из уравнения (1) имеем  $\Delta\Pi = 0$  и, соответственно, в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \quad \Pi_0 = \Pi|_{r=R}. \quad (4)$$

Считая, что возмущение давления пропорционально малой деформации  $\xi$ , ищем решение этого уравнения в виде:  $\Pi = F(r) \cdot \xi = F(r) \cdot \varepsilon e^{i(kz+m\varphi)}$ , где  $F(r)$  описывает радиальное возмущение давления. Тогда из (4) для радиальной составляющей  $F(r)$  имеем уравнения Бесселя:

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + ((im)^2 - k^2 r^2) F = 0.$$

Его решение выражается через модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда)  $K_m(kr)$ . Соответственно имеем:

$$\Pi = F_0 \xi \cdot K_m(kr) = \varepsilon F_0 \cdot K_m(kr) \cdot e^{i(kz+m\varphi)}. \quad (5)$$

Константа  $F_0$  определена ниже из граничного условия.

Граничное значение давления. Граничное условие (3) запишем в виде:

$$p_0 + \delta p = \alpha \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (6)$$

где  $p_0 = \alpha/R$  – разность давлений внутри жидкого стекла и в полости в отсутствие возмущения.

Подставляя выражение для суммы обратных радиусов, полученное в Приложении,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} (1 - m^2 - x^2) \xi, \quad \text{где } x = kR,$$

в уравнение (5), имеем:

$$\left( \frac{\delta p}{\rho} \right)_R = -\frac{\alpha}{R^2 \rho} (1 - m^2 - x^2) \xi = F_0 \xi K_m(x). \quad (7)$$

Откуда следует:  $F_0 = -\frac{\alpha}{R^2 \rho K_m(x)} (1 - m^2 - x^2)$ .

Дисперсионное уравнение. Из (1) следует уравнение для радиального смещения:  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \Pi$ . Из него, используя выражение для давления (5), имеем общее дисперсионное соотношение:

$$\gamma_m^2 = -\frac{F_0}{R} x K'_m(x).$$

Подставляя сюда выражение для граничного давления (7), получаем:

$$\gamma_m^2 = -\frac{\alpha}{R^3 \rho} \frac{x K'_m(x)}{K_m(x)} (m^2 + x^2 - 1). \quad (8)$$

Выражение (8) отличается знаком правой части от результата, полученного Рэлеем для случая поверхностного натяжения [13, 14]. Это приводит к существенному отличию рассматриваемой нами неустойчивости от рэлеевской.

В частности, в отличие от рэлеевского случая при  $m \geq 1$  имеет место нарастание возмущения. Действительно, величины  $-K'_m(x)/K_m(x)$  и  $(m^2 + x^2 - 1)$  для  $m \geq 1$  при любых значениях  $x$  положительны, соответственно,  $\gamma_m > 0$  при  $m \geq 1$ . В рэлеевском же случае (когда знак правой части противоположен) моды с  $m \geq 1$  устойчивы. Действительно, величина  $(1 - m^2 - x^2)$  для  $m \geq 1$  при любых значениях  $x > 0$  отрицательна, поэтому в рэлеевском случае величина  $\gamma_m$  (при  $m \geq 1, x > 0$ ) – мнимая, и для возмущений с  $m \geq 1$  имеют место колебания, а не нарастание возмущения.

Тот факт, что при поверхностном расталкивании неустойчивыми оказываются все возмущения с малой длиной волны, согласуется с выводом, вытекающим из рассмотрения плоского случая [15, 16]. Действительно, совершая в (8) переход к плоской геометрии ( $x = kR \rightarrow \infty$ ), имеем:

$$\gamma^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3 \cdot \left( -\frac{K'_m(x)}{K_m(x)} \right)_{x \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\rho} k^3.$$

Здесь учтено, что  $K_m(x)|_{x \rightarrow \infty} = -K'_m(x)|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\pi/2x} \exp(-x)$ . Это выражение совпадает с полученным в [15, 16].

В рассматриваемом случае поверхностного расталкивания для осесимметричной моды ( $m = 0$ ), учитывая  $K'_0(x) = -K_1(x)$ , имеем:

$$\gamma_0^2 = \frac{\alpha}{R^3 \rho} f(x), \quad f(x) = \frac{x K_1(x)}{K_0(x)} (x^2 - 1). \quad (9)$$

Она неустойчива при  $x = kR > 1$  (рис. 1), т.е. тогда, когда длина волны возмущения меньше длины окружности поперечного сечения полости  $\lambda < 2\pi R$ .

В рэлеевском случае (поверхностного натяжения) для осесимметричной моды  $m = 0$  надо изменить знак в правой части (9). При этом неустойчивость возникает лишь при длинноволновых возмущениях  $kR < 1, \lambda > 2\pi R$ . Поскольку  $\max\{-f(x)\} = -f(0.484) =$

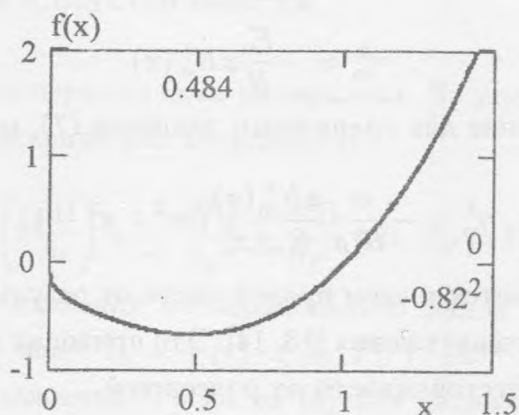


Рис. 1. Функция  $f(x) = \frac{\gamma^2 R^3}{\alpha} \rho$ , характеризующая устойчивость и неустойчивость осесимметричной моды возмущения.

$0.82^2 = 0.672$  (рис. 1), то максимальный инкремент нарастания  $\gamma_0 = 0.82\sqrt{\eta R^3 \rho}$  реализуется для возмущения с длиной волны:  $\lambda = 2\pi R/0.484 \approx 13R$ . Выражение (8) для поверхностного натяжения (с другим знаком правой части) использовалось в работе [12] для объяснения природы образования цепочки каверн в волоконном световоде. Однако, как показано в [15, 16], это объяснение несостоятельно.

### Интерпретация механизмов неустойчивости

Итак, в случае поверхностного расталкивания оказываются неустойчивыми все моды, кроме осесимметричной, которая устойчива относительно лишь длинноволновых колебаний. В случае же поверхностного натяжения, только эта мода оказывается неустойчивой. Это допускает простую интерпретацию.

Тангенциальные силы поверхностного расталкивания стремятся увеличить, а не сократить поверхность. В плоском случае силам, увеличивающим поверхность, нет противодействующих сил, и поверхность оказывается неустойчивой относительно всех малых возмущений (при любых длинах волн в отсутствие гравитации). В цилиндрической же геометрии против смещения за счет сил расталкивания, направленных вдоль образующих цилиндра, направлены азимутальные силы расталкивания. Они и стабилизируют длинноволновые возмущения.

Поверхностное же натяжение стремится уменьшить поверхность и это в плоском случае делает ее устойчивой относительно всех малых возмущений. В цилиндриче-

ской геометрии, однако, при положительном поверхностном натяжении стягивающие азимутальные силы приводят к неустойчивости, когда оказываются больше сил, направленных вдоль образующих цилиндра.

Итак, проведенное рассмотрение устойчивости цилиндрической полости в жидкости показывает, что при отрицательном коэффициенте натяжения цилиндрическая поверхность неустойчива относительно всех мод, кроме аксиально-симметричной моды. Аксиально-симметричная мода неустойчива относительно возмущений с длиной волны меньшей окружности поперечного сечения полости и устойчива относительно возмущений с длиной волны большей окружности поперечного сечения полости.

*Приложение. Изменение площади цилиндрической поверхности при малых возмущениях.* Вычислим величину  $(1/R_1) + (1/R_2)$  в цилиндрических координатах при малых возмущениях, аналогично тому, как это сделано в [18, с. 336] для декартовых координат. Площадь поверхности, описываемой в цилиндрических координатах, выражается следующим образом:

$$f = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} r dz d\varphi = \iint \left\{ r + \frac{r}{2} \left[ \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 \right] \right\} dz d\varphi =$$

$$= \iint \left\{ (R + \xi) + \frac{R + \xi}{2} \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{(R + \xi)^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right)^2 \right] \right\} dz d\varphi,$$

где  $r = R + \xi$  ( $\xi \ll R$ ) – уравнение деформируемой поверхности.

Определяя вариацию  $\delta f$  функции  $f$ , с точностью до членов первого порядка по  $\xi$  получаем:

$$\delta f = \iint \left\{ \delta \xi + (R + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} + \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \varphi} \right\} dz d\varphi.$$

Используя равенства, полученные интегрированием по частям

$$\int (R + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} dz = - \int \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + (R + \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \delta \xi dz,$$

$$\int \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \varphi} d\varphi = - \int \left[ \frac{-1}{(R + \xi)^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right] \delta \xi d\varphi,$$

приходим к выражению:

$$\delta f = \int \int \left\{ 1 - (R + \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{R + \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right\} \delta \xi d\varphi dz.$$

Исходя из этого выражения и учитывая

$$\delta f = \int \delta \xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df, \quad \delta \xi df = \delta \xi \cdot (R + \xi) d\varphi dz,$$

находим

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R + \xi} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{(R + \xi)^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}.$$

Полагая далее  $\xi = \varepsilon(t) \cdot e^{i(kz+m\varphi)}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R + \xi} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{(R + \xi)^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{R + \varepsilon e^{i(kz+m\varphi)}} + k^2 \varepsilon e^{i(kz+m\varphi)} + \frac{1}{R^2} m^2 \varepsilon e^{i(kz+m\varphi)} \approx \\ &\approx \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} (1 - m^2 - x^2) \varepsilon e^{i(kz+m\varphi)}, \end{aligned}$$

где  $x = kR$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Raman Kashyap. Proc. Internat. Conf. Lasers'87, Lake Tahoe, Nevada, Dec. 7-11, USA McLean, VA: STS Press, 1987, p. 859.
- [2] Kashyap R., Blow K. J. Electronics Letters, **24**, No 1, 47 (1988).
- [3] Hand D. P., Russel P. St. J. Optics Letters, **13**, No 9, 767 (1988).
- [4] Hand D. P., Russel P. St. J. 14th European Conference on Optical Communications 11-15 Sept, Brighton, UK, part 1, p. 111, 1988.
- [5] Kashyap R., Sayles A., Cornwell G. F. Proceedings of SPIE Int. Soc. Opt. Eng., **2966**, 586 (1997).
- [6] Driscoll T. J., Calo J. M., Lawandy N. M. Optics Letters, **16**, N 13, 104 (1991).
- [7] Dianov E. M., Mashinsky V. M., Myzina V. A., et al. Sov. Lightwave Commun., **2**, 293 (1992).
- [8] Дианов Е. М., Буфетов И. А., Фролов А. А. и др. Квантовая электроника, **32**, N 6, 476 (2002).



- [9] Davis D. D., Mettler S. C., DiGiovanni D. J. Proceedings of SPIE, **2714**, 202 (1997).
- [10] Davis D. D., Mettler S. C., DiGiovanni D. J. Proceedings of SPIE, **2966**, 592 (1997).
- [11] Голятина Р. И., Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 26 (2004).
- [12] Atkins R. M., Simpkins P. G., Yablon A. D. Optics Letters, **28**, No. 12, 974 (2003).
- [13] Lord Rayleigh. Nature, **95**, 66 (1915).
- [14] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford U. Press, Oxford, 1961), Chap. XII.
- [15] Яковленко С. И. Квантовая электроника, 2004, (в печати).
- [16] Яковленко С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7, 25 (2004).
- [17] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
- [18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986.

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 8 июля 2004 г.