УДК 530.1

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МАКСВЕЛЛА–ШРЕДИНГЕРА И ЕЕ РЕШЕНИЯХ

Н. А. Жура, А. Н. Ораевский

Предложена система дифференциальных уравнений, объединяющая в себе как систему Максвелла, так и уравнение Шредингера. Расходимость div и соответствующего поля удовлетворяет (вообще говоря, неоднородному) уравнению Шредингера, и потому может быть отождествлена с ψ-функцией Шредингера, а также может считаться плотностью (комплекснозначной) заряда. Соленоидальное векторное поле rot и есть решение системы Максвелла, порожденное соленоидальными внешним и начальным полями. Решение системы получено в явном виде.

1. Одной из важных проблем квантовой механики с момента, когда Э. Шредингер [1] предложил основное уравнение, известное теперь под его именем, является проблема, связанная с физическим смыслом решения этого уравнения, обычно называемого ψ-функцией. Наиболее определенно и четко сформулировал ее М. Планк. Вот его последние слова в приветствии, с которым он выступил, в обращении к Э. Шредингеру, по поводу вступления последнего в должность руководителя кафедры, прежде занимаемой им самим: “Вы были первым, кто показал, как пространственно-временные процессы в атомной системе могут быть фактически полностью детерминированы, хотя и при предположении, что элементами системы считаются не движения частиц, а движения волн материи; и как загадочные дискретные собственные значения энергии системы можно вычислить с абсолютной точностью из вашего дифференциального уравнения при естественных граничных условиях, между тем как вопрос о физическом смысле волн можно оставить нерешенным”. (Цитировано по [2].)

В дальнейшем был предпринят ряд усилий крупных физиков для решения этой проблемы, среди которых особо отметим работы М. Борна и Л. Инфельда [3 – 5], однако вопрос остался нерешенным. К настоящему времени он перестал быть столь злободневным и обычно смысл ψ-функции связывают с одним из ее свойств, а именно, с ее известной вероятностной трактовкой, основанной на сохранении во времени интеграла от ее квадрата модуля по всему пространству.

Очевидно, такая точка зрения, в силу своей неполноты, ограничивает внутренние возможности дальнейшего развития теории. Во многом это является следствием того, что уравнение Шредингера, безусловно являясь одним из основных уравнений, описывающим явления микромира, было предложено как средство решения наиболее трудной проблемы того времени – описания спектра атома водорода, но вне всякой связи с предшествовавшими теориями. Его статус, в этом смысле, не изменился и в настоящее время. До сих пор считается, что оно принципиально отлично от всех уравнений "классической" физики.

В настоящей заметке предлагается одно обобщение максвелловской теории электромагнитного поля [6], содержащее одновременно как стандартный вариант этой теории, так и уравнение Шредингера. Точнее, соответствующие поля совпадают с электромагнитным полем и ψ-функцией при соответствующих значениях коэффициентов, фигурирующих в предлагаемой системе.

Именно, если вектор-функция $u(t, x)$ есть решение предлагаемой системы, то ψ-функция совпадает с $\operatorname{div} u$, а электромагнитное поле с $\operatorname{rot} u$.

В заметке приводится также сравнение предлагаемого обобщения системы Максвелла со стандартным вариантом, впрочем в предположении существования так называемого "магнитного" заряда [10]. Для рассматриваемой системы получено в явной форме ее решение в каждый момент времени и в каждой точке пространства, если только оно известно в некоторый начальный момент времени, а также если известно внешнее поле.

2. Стандартная система Максвелла с электрическими и "магнитными" зарядами и токами. Рассмотрим прежде всего систему Максвелла в ее классической форме [6]

$$\frac{\epsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H - \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} \epsilon E = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E, \quad \operatorname{div} H = 0, \quad t > 0.$$

Она описывает динамику электромагнитного поля $\{E, H\}$ во времени в каждой точке пространства переменных $x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3$. Постоянная $c > 0$ – скорость света в вакууме, а $\epsilon > 0$ и $\mu > 0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, соответственно. Фигурирующие в правых частях первой пары уравнений вещественная функция $\rho(t, x)$ и вектор-функция $j(t, x)$ предполагаются удовлетворяющими условию неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

В этих условиях электромагнитное поле может быть определено в каждый момент времени и в каждой точке пространства явным образом, если только оно известно в некоторый начальный момент времени, скажем $t = 0$:

$$E(0, x) = E_0(x), \quad H(0, x) = H_0(x), \quad x \in IR^3. \tag{3}$$

При этом, конечно, следует считать выполненными условия согласования

$$4\pi\rho(0, x) = \operatorname{div} E_0(x), \quad \operatorname{div} H_0(x) = 0. \tag{4}$$

Существуют различные возможности связать систему (1) с квантовой механикой.

Вкратце остановимся на одной из них [7], когда в правой части (1) вместо ρ следует взять функцию $e|\psi|^2$, а вместо j – вектор-функцию $-ie\beta_0(\bar{\psi}\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\bar{\psi})$. Здесь черта сверху означает операцию комплексного сопряжения, а постоянная $\beta_0 > 0$ суть $\hbar/2m$, где $\hbar$ – постоянная Планка, а m – масса электрона. Нетрудно видеть, что уравнение неразрывности (2) выполняется, если комплекснозначная функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера [7]

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\beta\Delta\psi + q(x)\psi, \tag{5}$$

где $\beta = \hbar\beta_0 = \hbar^2/2m$, а $q(x)$ – потенциальная энергия частицы.

Заметим, однако, что число уравнений (вещественных) в системе (1) вместе с (5) равно десяти. Кроме того, приведенное выше выражение для j всегда можно заменить на $j + \operatorname{rot} h$, где h – заданная достаточно гладкая вектор-функция. Уравнение неразрывности при этом не меняется, а уравнение (5) изменится.

В последнее время предлагались и другие, несколько более общие схемы [8].

В настоящей заметке к рассматриваемой проблеме предлагается иной подход. Одним из его преимуществ, на наш взгляд, является уменьшение числа уравнений в системе, в противоположность только что приведенным.

Прежде, чем приводить эту систему, заметим, что она является обобщением так называемой системы Максвелла с "магнитными" зарядом и током. В настоящее время по этой последней системе имеется обширная литература. Не имея возможности для подробного ее обсуждения, отметим лишь работы [9], [10], [11], причем в последних двух можно найти дополнительные ссылки.

Заметим еще, что эта система стала настолько распространенной, что фигурирует даже в учебной литературе [12]. Поскольку именно она является основой для нашего обобщения системы Максвелла, то приведем и ее:

$$\frac{\epsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\, H - \frac{4\pi}{c} j^1, \quad \mathrm{div}\, \epsilon E = 4\pi\rho^1, \tag{6}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \mathrm{rot}\, E - \frac{4\pi}{c} j^2, \quad \mathrm{div}\, \mu H = 4\pi\rho^2.$$

Здесь ρ^2 и j^2 – упомянутые выше плотности "магнитных" заряда и тока, а j^1 и ρ^1 – плотности электрических тока и заряда, фигурирующие в стандартном варианте теории Максвелла.

Целесообразно изменить обозначения на менее громоздкие. Положим

$$u_1 = \sqrt{\epsilon}E, \quad u_2 = \sqrt{\mu}H, \quad 4\pi j^1 = \sqrt{\epsilon} f_1, \quad 4\pi j^2 = \sqrt{\mu} f_2,$$

а также $4\pi\rho^1 = \sqrt{\epsilon}\rho_1$, $4\pi\rho^2 = \sqrt{\mu}\rho_2$. Тогда система (6) примет вид

$$iu_t = \alpha \mathrm{rot}\, u - if, \quad \mathrm{div}\, u = \rho, \quad t > 0, \tag{7}$$

где постоянная $\alpha = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, и введены комплекснозначные переменные $u = u_1 + iu_2$, $f = f_1 + if_2$, $\rho = \rho_1 + i\rho_2$. Начальное условие при этом принимает вид

$$u(0, x) = g(x), \tag{8}$$

где $g(x)$ очевидным образом выражается через $E_0(x)$ и $H_0(x)$.

3. Система Максвелла–Шредингера. Система, о которой пойдет речь далее, получается из системы (7) добавлением в правую часть первого уравнения слагаемого $-\beta \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, u$, и пренебрежением вторым из уравнений. Таким образом, имеем вместо (7) уравнение

$$iu_t = \alpha \mathrm{rot}\, u - \beta \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, u - if, \tag{9}$$

где физический смысл положительной постоянной β будет уточнен далее.

Остановимся, прежде всего, на формулах, определяющих поле $u(t, x)$ в каждый момент времени в произвольной точке пространства, которые в явном виде выражаются через значения $g(x)$ поля в начальный момент времени и внешнее поле $f(t, x)$. С этой целью опишем, прежде всего, какие требования накладываются на эти поля. Именно, будем считать, что компоненты начального и внешнего полей в каждый момент времени, как функции точки пространства, бесконечно дифференцируемы и убывают вместе со всеми своими производными на бесконечности, быстрее любого полинома. Другими словами, они являются элементами известного класса Шварца $S(IR^3)$ [13], [16]. Решение задачи (8), (9) в этих предположениях существует единственно и также принадлежит этому же классу.

В действительности, решения можно изучать и при более слабых ограничениях на $g(x)$ и $f(t, x)$. В частности, эту задачу можно рассматривать и в так называемых соболевских пространствах [13]. Более того, результаты остаются в силе и в классе распределений, или, что то же самое, в классе обобщенных функций умеренного роста [13].

Прежде, чем привести упомянутые выше формулы, проведем некоторые дополнительные построения. Именно, пусть вначале внешнее поле отсутствует, то есть $f(t, x) = 0$, а начальное поле $g(x)$ представимо в виде суммы соленоидального и потенциального полей:

$$g = g^0 + g^1, \quad \mathrm{div}\, g^1 = 0, \quad \mathrm{rot}\, g^0 = 0, \tag{10}$$

что всегда можно сделать, причем единственным образом. Разложение (10) называется разложением Гельмгольца [14]. В явном виде фигурирующие в (10) поля определяются согласно формулам

$$g^0 = e * \mathrm{div}\, g, \quad g^1 = -\omega(e) * \mathrm{rot}\, g. \tag{11}$$

Здесь вектор-функция (точнее, распределение) $e = e(x) \equiv x/4\pi|x|^3$ – потенциальное поле, порожденное сосредоточенным в начале координат единичным зарядом. Оно является решением системы уравнений

$$\mathrm{div}\, e = \delta, \quad \mathrm{rot}\, e = 0, \tag{12}$$

где δ – известная дельта-функция Дирака.

Вектор-функция $g^0 = e * \operatorname{div} g$ при этом является решением системы

$$\operatorname{div} g^0 = \operatorname{div} g, \quad \operatorname{rot} g^0 = 0. \tag{13}$$

Совершенно аналогично, вектор-функция $g^1 = -\omega(e) * \operatorname{rot} g$ есть решение системы уравнений

$$\operatorname{div} g^1 = 0, \quad \operatorname{rot} g^1 = \operatorname{rot} g. \tag{14}$$

Матрица $\omega(e)$, фигурирующая в (11), имеет вид

$$\omega(e) = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В (11) и всюду ниже $*$ обозначает операцию свертки двух функций, скажем f и g:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{IR^3} f(x-y)g(y)dy. \tag{16}$$

Определим еще среднее значение функции (или вектор-функции) χ по сфере $\sigma(x,r) = \{y \in IR^3 : |x-y| = r\}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x согласно формуле

$$(M\chi)(r,x) = \left(\int\limits_{\sigma(x,r)} \chi(y) d\sigma \right) / 4\pi r^2, \tag{17}$$

где $d\sigma$ – элемент площади ее поверхности.

В этих условиях поле $u(t,x)$ в каждый момент времени $t > 0$ в произвольной точке пространства x определяется по формуле

$$u(t,x) = (S * g^0)(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}(t(Mg^1)(t,x)) - i\alpha t(M\operatorname{rot} g)(t,x). \tag{18}$$

В этой формуле $S = S(t,x) = \exp(-i|x|^2/4\beta t)/(4\pi i\beta t)^{\frac{3}{2}}$ – функция Грина решения задачи Коши для (свободного, т.е. без потенциала) уравнения Шредингера $i\psi_t = -\beta\Delta\psi$, а среднее берется по сфере $\sigma(x,r)$ радиуса $r = \alpha t$, $t > 0$, с центром в точке x. Заметим, что выражение для этой функции Грина получил еще Л. де Бройль [15] (см. также [16]).

Доказательство формулы (18) проводится непосредственной подстановкой в уравнение (9), где $f = 0$, и проверкой условия (8). Подробности опускаем. По поводу формулы

(18) заметим еще, что первое ее слагаемое в правой части является потенциальным полем, а каждое из остальных – соленоидальным. При этом соленоидальные поля допускают истолкование в духе формул Кирхгофа для волнового уравнения.

Как следствие, получаем явную форму принципа Гюйгенса для соленоидальных векторных полей.

Применяя метод Дюамеля [14] и используя полученные формулы (18), можно получить также формулы для поля, порожденного внешним источником, предполагая, что в начальный момент поле отсутствует, т.е. $g(x) = 0$:

$$
\begin{gathered}
u(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{IR^3} S(t-\tau, x-y) f^0(\tau, y) d\tau dy + \\
+\frac{1}{4\pi} \int\limits_{B(x,\alpha t)} \left(\frac{h^1(t-|x-y|/\alpha, y)}{|x-y|} + i\frac{f^1(t-|x-y|/\alpha, y)}{|x-y|^2} \right) dy,
\end{gathered} \tag{19}
$$

где $S(t,x)$ – та же, что и в (18), а f^0 и f^1 определяются по f при каждом $t > 0$ аналогично (10), (11). Кроме того, вектор-функция

$$
h^1 = i\partial f^1/\partial\nu + \operatorname{rot} f,
$$

где $\partial/\partial\nu$ – дифференцирование по направлению внешней нормали ν к сфере $\sigma(x,r)$, $r = \alpha t$, ограничивающей шар $B(x, \alpha t)$.

Совокупность формул (18), (19) дает полное поле, удовлетворяющее уравнению (9) и совпадающее в начальный момент с полем $g(x)$.

Поскольку, как нетрудно проверить непосредственно, при $f = 0$ имеет место закон сохранения энергии электромагнитного поля

$$
\int\limits_{IR^3} |\operatorname{rot} u|^2 dx = \text{const} \tag{20}
$$

и энергии потенциального поля

$$
\int\limits_{IR^3} |\operatorname{div} u|^2 dx = \text{const}, \tag{21}
$$

причем постоянные в правых частях этих формул совпадают с соответствующими начальными энергиями

$$
\int\limits_{IR^3} |\operatorname{rot} g|^2 dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{IR^3} |\operatorname{div} g|^2 dx,
$$

то полученное решение является единственным.

4. Система Максвелла–Шредингера и потенциалы. Отмеченный выше факт представления полей в формуле (18) (верный также и для (19)) в виде суммы потенциального и соленоидального слагаемых рассмотрим с несколько более общей точки зрения. Именно, попытаемся найти те уравнения, решениями которых эти слагаемые являются.

С этой целью представим решение $u(t,x)$ системы (9) в виде

$$u = v + w, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} w = 0. \tag{22}$$

Непосредственная проверка показывает, что поля v и w имеют вид

$$v = -\omega(e) * \varphi, \quad w = e * \psi, \tag{23}$$

где e и $\omega(e)$ определены выше, а φ и ψ являются, соответственно, максвелловским электромагнитным полем, поскольку

$$i\varphi_t = \alpha \operatorname{rot} \varphi + i \operatorname{rot} f, \quad \varphi(0,x) = \operatorname{rot} g(x), \tag{24}$$

и шредингеровским полем, так как

$$i\psi_t = \beta \Delta \psi - i \operatorname{div} f, \quad \psi(0,x) = \operatorname{div} g(x). \tag{25}$$

Строго говоря, уравнение (25) является (свободным) уравнением Шредингера, если $\operatorname{div} f = 0$ и постоянная $\beta = \hbar^2/2m$.

Для доказательства достаточно заметить, что, полагая

$$\operatorname{rot} v = \varphi, \quad \operatorname{div} w = \psi$$

для определения φ и ψ получаем (24), (25) соответственно. Функции φ и ψ, являющиеся решениями (24) и (25), можно получить в явном виде, совершенно аналогично тому, как были получены формулы (18), (19). Тогда для определения w и v имеем, соответственно, системы (13) и (14), где $\operatorname{rot} g$ следует заменить на φ, а $\operatorname{div} w$ на ψ. Формулы (11) приводят тогда к справедливости (23).

Заметим, что если $\varphi(t,x)$ – решение (24), то оно является также и решением следующей задачи для волнового уравнения

$$\varphi_{tt} = \alpha^2 \Delta \varphi + f_*(t,x), \quad \varphi(0,x) = g(x), \quad \varphi_t(0,x) = g_*(x), \tag{26}$$

где $f_* = \partial(\mathrm{rot}\, f)/\partial t - i\alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, f$, $g_* = \mathrm{rot}\, f(0,x) - i\alpha \mathrm{rot}\, g(x)$. При этом, очевидно $\mathrm{div}\,\varphi = 0$ при всех $t \geq 0$. Обратное утверждение также имеет место.

Другая форма использования потенциалов является, по существу, классической для стандартной системы Максвелла. Для рассматриваемой же системы она состоит в отыскании решения системы (9) с помощью подстановок

$$v = \mathrm{rot}\varphi, \quad w = \mathrm{grad}\,\psi, \tag{27}$$

причем предполагается $\mathrm{div}\,\varphi = 0$ (так называемая кулоновская калибровка), и $\mathrm{rot}\,\psi = 0$. В этом случае имеем для определения φ и ψ аналогичные (24), (25) уравнения. Именно

$$i\varphi_t = \alpha \mathrm{rot}\,\varphi + iq^1, \quad \varphi(0,x) = p^1, \tag{28}$$

где $p^1 = \omega(e) * \omega(e) * \mathrm{rot}\, g$, $q^1 = \omega(e) * \omega(e) * \mathrm{rot}\, f$.

Что касается скалярной функции ψ, то она есть решение задачи

$$i\psi_t = -\beta\Delta\psi + ie_0 * \mathrm{div}\, f, \quad \psi(0,x) = e_0 * \mathrm{div}\, g, \tag{29}$$

где $e_0 = e_0(x) \equiv -1/4\pi|x|$ – потенциал единичного заряда, расположенного в начале координат.

Нетрудно видеть, что φ и в этом случае является решением волнового уравнения вида (26), удовлетворяющим условию $\mathrm{div}\,\varphi = 0$.

5. Сравнение с классическим подходом, когда $\beta = 0$ и случаем $\beta \longmapsto -i\beta$. Итак, выше показано, что решение системы Максвелла–Шредингера $u(t,x)$ представимо суммой электромагнитного поля v и потенциального w, причем дивергенция ψ потенциального поля является решением неоднородного (то есть со внешним полем) уравнения Шредингера (точнее, уравнения типа Шредингера, поскольку параметр β может и не быть равным $\hbar^2/2m$), принимающим в начальный момент времени значение $\mathrm{div}\, g(x)$.

Отметим также, что при $\beta = 0$ уравнение (25) в точности совпадает с (2) (с учетом обозначений, приведенных сразу после формулы (6)). При этом конечно следует считать ρ и f вещественными функциями. Решение уравнения (25) и в таком случае остается комплекснозначным. Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение, определяющее динамику функции $\mathrm{div}\, u$ во времени под воздействием внешнего поля $\mathrm{div}\, j$. Уравнение (25) отличается от него лишь тем, что принимается во внимание зависимость $\mathrm{div}\, u$ от производных по пространственным переменным. Роль и характер этой зависимости в значительной степени связаны с величиной параметра $\beta > 0$. Смысл сказанного можно прояснить, рассмотрев несколько более общее чем (9), однородное уравнение

$$iu_t = \alpha \operatorname{rot} u - \beta \operatorname{grad} \operatorname{div} u + e * (q \operatorname{div} u), \quad t > 0,$$

где $q(x) = kx^2/2$, $k > 0$ – постоянная. В этом случае уравнение (25) принимает, как нетрудно видеть, форму

$$i\psi_t = -\beta\Delta\psi + \frac{k}{2}x^2\psi, \quad \psi(0,x) = \operatorname{div} g(x). \tag{30}$$

Непосредственная проверка показывает, что если взять функцию $g(x)$ так, чтобы

$$\operatorname{div} g(x) = \psi_0(x), \quad \operatorname{rot} g(x) = 0, \quad \psi_0(x) = c_0 e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

то решением задачи (30) будет функция

$$\psi(t,x) = c_0 e^{-i\lambda_0 t} e^{-\frac{1}{2}\lambda_0 x^2}, \quad t > 0,$$

где постоянная λ_0 – энергия основного состояния:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{k\beta}{2}}.$$

Поэтому величина β (наряду с k) характеризует степень "размазанности" решения $\psi(t,x)$ в пространстве. При достаточно малых β оно будет сконцентрировано всегда в окрестности начала координат, но во времени будет осциллировать с частотой, пропорциональной λ_0.

В резко контрастном отношении к этому случаю находится решение задачи

$$iu_t = \alpha \operatorname{rot} u + i\beta \operatorname{grad} \operatorname{div} u - if, \quad u(0,x) = g(x),$$

когда коэффициент β заменен на $-i\beta$. Именно здесь вместо уравнения Шредингера имеем уравнение диффузии

$$\psi_t = \beta\Delta\psi + \operatorname{div} f, \quad \psi(0,x) = \operatorname{div} g(x),$$

решение которого хорошо известно, и поэтому не приводится здесь. Плотность заряда $\psi(t,x)$ вещественна, если вещественны $g(x)$ и $f(t,x)$. Однако во времени ψ теперь экспоненциально затухает.

Таким образом в рамках подхода, связанного с системой (9), интуитивные представления о заряде, как "сосредоточенном" объекте в определенной мере (в силу малости постоянной β), сохраняются. Серьезным препятствием является, однако, комплексно-значный характер заряда. Имея в виду тот факт, что уравнения Шредингера прекрасно описывает, по крайней мере, атом водорода, заключаем, что отождествление функции ψ – решения уравнени Шредингера с (комплексной) плотностью заряда одновременно решает обе проблемы: и то, что заряд – комплекснозначная функция, и то, что ψ – функция Шредингера – это расходимость потенциального поля или, что равносильно, источник потенциального поля. Разумеется закон Кулона (вторая из формул (23)) всегда остается в силе. Заметим, что первая из формул (23) определяет магнитное поле, порожденное соленоидальным источником. Однако на подробностях здесь не останавливаемся.

6. Резюмируем вкратце полученные результаты. *В заметке предложена система, названная системой Максвелла–Шредингера, объединяющая в себе черты как классической системы Максвелла, так и уравнения Шредингера* (разумеется, при соответствующих значениях коэффициентов системы). *Получено в явном виде поле, определяемое этой системой в каждый момент времени в каждой точке пространства, при условии, что поле известно в начальный момент времени, а также если известно внешнее поле. Расходимость* $\mathrm{div}\, u$ *этого поля может быть отождествлена с плотностью заряда (комплекснозначной) и с* ψ*-функцией Шредингера. Его эволюция во времени определяется уравнением Шредингера, причем начальным значением служит расходимость* $\mathrm{div}\, g$ *начального поля, а внешним полем служит расходимость* $\mathrm{div}\, f$ *исходного внешнего поля. Аналогично, соленоидальная составляющая исходного поля может быть истолкована как максвелловское электромагнитное поле, оно совпадает с* $\mathrm{rot}\, u$. *Его динамика определяется системой Максвелла с соленоидальным начальным полем* $\mathrm{rot}\, g$ *и соленоидальным внешним полем (током)* $\mathrm{rot}\, f$.

Коэффициент β, *фигурирующий перед потенциальным слагаемым, добавленным к исходной системе Максвелла, характеризует степень пространственной концентрации величины* $\mathrm{div}\, u = \psi$, *и это, вместе с высокой степенью симметрии системы, может служить, на наш взгляд, одним из аргументов в пользу предлагаемого подхода к объснению смысла* ψ*-функции.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schrödinger E. Ann. der Phys., **79**, 489 (1926).

[2] Борн М. Размышления и воспоминания физика. М., Наука, 1977.

[3] Born M. and Infeld L. Proc. Roy. Soc., **A144**, 425 (1934).
[4] Born M. and Infeld L. Proc. Roy. Soc., **A147**, 522 (1935).
[5] Born M. and Infeld L. Proc. Roy. Soc., **A146**, 935 (1934).
[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, **2**, Теория поля, М., Наука, 1988.
[7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, **3**, Квантовая механика, М., Наука, 1989.
[8] Андреев А. В. Письма в ЖЭТФ, **72**, вып. 5, 350 (2000).
[9] Schwinger T. Science, **165**, N 3895, 757 (1969).
[10] Монополь Дирака. Сборник статей. Перевод с английского под ред. Б. М. Болотовского и Ю. Д. Усачева. М., Мир, 1970.
[11] Страшев А. Н., Томильчик Л. М. Электродинамика с магнитным зарядом. Минск, 1975.
[12] Векштейн Г. Е. Физика сплошных сред в задачах. М., 2002.
[13] Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. М., МИНПО, 2002.
[14] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Шестое издание, испр. и доп., М., МГУ, 1999.
[15] L. de Broglie. Ann. der Phys., **3**, 22 (1926).
[16] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1988.
[17] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973. (Born M. and Wolf E. Principles of Optics, Fourth Edition, Pergamon Press, 1968).

Поступила в редакцию 1 сентября 2004 г.