Краткие сообщения по физике № 10 октябрь 1970

О ПЯТИМЕРНОЙ ТРАКТОВКЕ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

И. М. Лизин, Л. А. Шелепин

В основе квантовой электродинамики лежит группа Лоренца $O(3,1)$. Ниже обсуждается возможность формулировки квантовой электродинамики на основе группы $O(4,1)$. Исходным пунктом является интерпретация уравнений Дирака и Максвелла как инвариантных к пятимерной псевдоэвклидовой группе вращений $O(4,1)$, содержащей группу Лоренца в качестве подгруппы.

Свободные уравнения, инвариантные к группе $O(4,1)$, в каноническом базисе[1] имеют вид

$$a^{MN;mn}\,\partial^{01}_{MN;mn}\,\psi^{\lambda_1\lambda_2}_{P'Q';p'q'} + \text{æ}\,\psi^{\lambda_1\lambda_2}_{PQ;pq} = 0, \qquad (1)$$

где ψ - функция преобразуется по неприводимому представлению $R(\lambda_1\lambda_2)$. Представление $R(\lambda_1\lambda_2)$ разлагается на сумму неприводимых представлений группы Лоренца[1]: $R(\lambda_1\lambda_2) \to \sum\limits_{D} D(PQ)$, причем, векторное представление $R(01) \to D(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}) + D(00)$. Величина $\partial^{01}\times\psi^{\lambda_1\lambda_2}$ преобразуется по представлению $R(01)\times R(\lambda_1\lambda_2)$ и, следовательно, для инвариантности уравнения (1) матрицы $a^{MN;mn}$ должны проектировать $R(01)\times R(\lambda_1\lambda_2)$ на $R(\lambda_1\lambda_2)$, т.е. элементами матрицы $a^{MN;mn}$ являются коэффициенты Клебша-Гордана группы $O(4,1)$

$$\begin{pmatrix} 01 \\ MN;mn \end{pmatrix.\left|\begin{matrix} \lambda_1\lambda_2 \\ P'Q';p'q' \end{matrix}\right|\begin{pmatrix.} \lambda_1\lambda_2 \\ PQ;pq \end{pmatrix}$$

с общим численным множителем Z.

Метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана этой группы рассмотрен в работе[1]. Напишем уравнение типа (1) для ψ- функции, преобразующейся по представлению $R(10) \rightarrow D(1/20) + D(01/2)$, т.е. для функции, которая при редукции на группу Лоренца преобразуется как биспинор Дирака. Выбрав представление полной группы $O(4,1)$, при котором $D(1/20)$ и $D(01/2)$ имеют разную P - четность[1] (это соответствует оператору пространственного отражения $P\psi = \gamma_5\gamma_0\psi$ с точностью до фазового множителя), подставив в (1) численные значения коэффициентов Клебша-Гордана, вычисленные в[1], положив $Z = \sqrt{5/2}$ и переведя операторы $\partial^{01}_{MN;mn}$ к обычному векторному базису, получим

$$(\gamma_i\partial_i + \gamma_5\partial_5 + \varkappa)\psi = 0, \qquad (2)$$

где γ_i, γ_5 - обычные матрицы Дирака в спинорном представлении. Заметим, что пятимерное уравнение типа (2) рассматривалось еще Дираком.

Для представления $O(4,1)$ с одинаковой P - четностью $D(1/20)$ и $D(01/2)$, т.е. $P\psi = \gamma_0\psi$, было бы

$$(\gamma_5\gamma_i\partial_i + \gamma_5\partial_5 + \varkappa)\psi = 0. \qquad (3)$$

Обозначив P -, T - и F - четности $D(PQ)$ (см.[1]) как ${}^{P}D(PQ)^{T}_{F}$, имеем для уравнения (2)

$$\left[{}^{-}D(1/2\ 1/2)^{+}_{+} + {}^{+}D(00)^{+}_{-}\right] \times \left[{}^{+}D(1/20)^{+}_{+} + {}^{-}D(01/2)^{+}_{-}\right] =$$

$$= \left[{}^{-}D(1/20)^{-}_{-} + {}^{+}D(01/2)^{-}_{+}\right] \qquad (4)$$

и для уравнения (3)

$$\left[{}^{-}D(1/2\ 1/2)^{+}_{+} + {}^{+}D(00)^{+}_{-}\right] \times \left[{}^{+}D(1/20)^{+}_{+} + {}^{+}D(01/2)^{-}_{-}\right] =$$

$$= \left[{}^{-}D(1/20)^{-}_{-} + {}^{-}D(01/2)^{+}_{+}\right]. \quad (5)$$

Таким образом, уравнения (2) и (3) неинвариантны относительно инверсий (оператор дифференцирования полной группы O(4,1) не зацепляется с соответствующим спинорным представлением), но инвариантны относительно операций PF, TF, PT. Вопрос о P и T отражениях уравнения типа (2) рассматривался также в[6]. Абстрактные уравнения (2) и (3), инвариантные к группе O(4,1), допускают двоякую физическую интерпретацию как описывающие частицы со спином 1/2. Во-первых, при редукции O(4,1) на группу Лоренца $x_5 = \mathrm{const}$, $\partial_5 \equiv 0$ получаем обычное уравнение Дирака. Т.е. можно считать, что уравнение Дирака инвариантно относительно группы O(4,1), но физические его решения лежат на гиперплоскости $x_5 = \mathrm{const}$. При другой интерпретации можно рассматривать пятимерные уравнения без свободного члена ($\varkappa = 0$). Приняв гипотезу о периодической зависимости ψ от пятой координаты[2], в частности, положив для простоты $\psi = \psi_0(x_i)e^{imx_5}$, получим уравнения Дирака, где перед членом с массой стоит γ_5.

Аналогично находится уравнение типа (1) для функции, преобразующейся по представлению R(20), которая при редукции на группу Лоренца распадается на вектор и антисимметричный тензор:

$$R(20) \rightarrow D(\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}) + D(1001)$$

$$(\beta_i\partial_i + \beta_5\partial_5 + \varkappa)\phi = 0, \quad (6)$$

где матрицы β_i и β_5 удовлетворяют алгебре Даффина-Кеммера-Петье

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\beta_\rho + \varepsilon_{\rho\nu}\beta_\mu, \quad (7)$$

причем индексы в (7) пробегают 5 значений. Другие реализации алгебры (7) рассматривались, например, в[7]. В каноническом базисе матрица β_5 имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 0_4 & & \\ & E_3 & \\ & & -E_3 \end{pmatrix}$$

(нижние индексы указывают размерность блоков).

Уравнение (6) неинвариантно относительно инверсии. Как и в первом случае, оператор ∂_μ меняет знак всех четностей представления R(20) на обратный. Тем не менее уравнение (7) инвариантно относительно операций PF, TF и PT. Аналогично уравнениям (2) и (3) уравнения Максвелла могут рассматриваться как пятиинвариантные, причем в предположении, что физические решения лежат в классе $x_5 = \mathrm{const}$, и откидывая пятую производную необходимо в векторном базисе вместо $\varkappa$ взять матрицу

$$\varkappa\begin{pmatrix} 0_4 & & \\ & E_3 & \\ & & E_3 \end{pmatrix}.$$

Пятимерная инвариантность уравнений Дирака и Максвелла позволяет в принципе построить квантовую электродинамику, ковариантную к группе O(4,1). Простейший лагранжиан взаимодействия, который можно построить из ψ и ϕ, преобразующихся по R(10) и R(20), имеет вид

$$L_{вз} = \frac{e}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi\phi_{\mu\nu}, \qquad (8)$$

где индексы пробегают 5 значений.

В четырехмерной записи имеем

$$L_{вз} = e\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi\phi_{5i} + \frac{e}{2}\psi(\gamma_i\gamma_k - \gamma_k\gamma_i)\psi\phi_{ik}. \qquad (9)$$

Интерпретируя ϕ_{5i} как потенциал A_i, а $\varkappa\phi_{ik}$ как тензор электромагнитного поля F_{ik}, получим, что в пятимерной трактовке объединяется минимальное электромагнитное взаимодействие и взаимодействие Паули, описывающее аномальные магнитные моменты (см., например[3]), величина которых связана с феноменологически выбираемой константой $\varkappa$. Отметим, что $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi$ всегда можно считать вектором, тогда $\bar{\psi}\gamma_i\psi$ будет псевдовектором, $\bar{\psi}\psi$ – псевдоскаляром, $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ – скаляром. Это следует из того, что двузначные представления можно перемножить двумя разными способами.

Разумеется, интерпретация (9) не является единственно возможной, и вопрос о происхождении пятимерной симметрии в квантовой электродинамике представляет особый интерес.

Уравнения Дирака и Максвелла, в отличие от некоторых других часто используемых релятивистских уравнений (например, Рарита–Швингера), явно ковариантны к группе Пуанкаре, причем уравнение Максвелла связано с невполне приводимым представлением. Группа Пуанкаре может рассматриваться как предел группы движений Де-Ситтера $O(4,1)$ при стремлении кривизны пространства к нулю (см.[4]). Возможно, с этим связана пятимерная инвариантность в классе решений $x_5 = const$.

С другой стороны, по-видимому, существенна связь пятимерной симметрии со свойствами коэффициентов Клебша–Гордана группы Лоренца. Инварианты последней группы можно рассматривать как коварианты $O(4,1)$ (сравни с подходом[5]). Тогда пятимерную симметрию можно считать проявлением динамической (скрытой) симметрии, связанной со взаимодействием. В целом применение аппарата пятимерной группы $O(4,1)$ представляется перспективным как для квантовой электродинамики вообще, так и в задаче движения электронов в поле многих кулоновских центров. В дальнейшем предполагается рассмотреть конкретные следствия такого подхода, связанные с получением новых симметрий для сечений.

Поступила в редакцию
7 июля 1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. И. М. Лизин, Л. А. Шелепин. Препринт ФИАН, 1970 г.
2. Ю. Б. Румер, Исследования по пятиоптике, ГИТТЛ, 1956 г.
3. А. А. Богуш, В. Г. Мороз. Введение в теорию классических полей. Наука и техника. Минск 1968 г.
4. C. Fronsdal, Rev. Mod. Phys., 37, 221 (1965).
5. Л. А. Шелепин. Nucl. Phys., 2B, 608 (1967).
6. V. I. Fushchich. Preprint ITF-70-4. Киев, 1970 г.
7. И. Ю. Кривский, Г. Д. Романко, В. И. Фущич. Теор. и матем. физика, 1, № 2, 242 (1969).