УДК 530.145

ЭВОЛЮЦИЯ ГАУССОВА ПЕРЕПУТАННОГО (СЖАТОГО) СОСТОЯНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В. П. Быков, Э. Нахвифард[1]

Исследована эволюция сжатого состояния, возбуждаемого в невырожденном параметрическом генераторе и являющегося гауссовым перепутанным состоянием. В рамках теории возмущений найдена зависимость от времени матрицы, определяющей амплитудное и фазовое распределения в волновом пакете исследуемого состояния. Полученные результаты позволяют вычислить усредненную дисперсию сжатого состояния, возбуждаемого практически.

Сжатое состояние света является макроскопическим квантовым явлением, не имеющим классического аналога. Именно этим сжатое состояние света интересно. Сжатый свет имеет также большие перспективы практического применения.

Однако эти особенности сжатого света не могут существенно проявиться из-за малых коэффициентов сжатия, практически достигнутых к настоящему времени. Одним из основных методов возбуждения сжатых состояний является параметрическая генерация света. При этом остается нерешенным главный вопрос – почему при параметрической генерации не реализуются большие коэффициенты сжатия, хотя они не запрещены, например, по энергетическим соображениям.

В [1] показано, что из-за наличия потерь параметрический генератор является невырожденным, т.е. в нем параметрически возбуждается одновременно пара частот, сумма которых приближенно равна частоте накачки, а разность лежит в пределах спектральной ширины параметрически возбуждаемого резонатора. Показано также, и

[1] Московский физико-технический институт, Москва.

это – главное, что в невырожденном параметрическом генераторе физические явления происходят несколько иначе, чем в вырожденном. В частности, в невырожденном генераторе как максимальная, так и минимальная неопределенности поля возрастают со временем. В вырожденном же параметрическом генераторе максимальная неопределенность поля возрастает, в то время как минимальная неопределенность убывает [2]. Это, по-видимому, объясняет малые коэффициенты сжатия в реальном параметрическом генераторе, так как из-за конечной спектральной ширины резонанса генерация в нем представляет собой сложную суперпозицию вырожденного и невырожденного режимов. Таким образом, главная проблема при достижении высоких коэффициентов сжатия – это сужение спектральной линии параметрически генерируемого излучения.

В [1] было показано, что сжатое состояние, возбуждаемое в невырожденном параметрическом генераторе, относится к гауссовым перепутанным состояниям. При этом был исследован случай, когда такое состояние возникает из вакуумного состояния. Однако представляет интерес исследовать эволюцию гауссова перепутанного состояния, когда оно возникает из произвольного подобного же состояния. Такие ситуации могут возникать при случайном изменении фазы источника накачки, что, как известно, составляет суть так называемой "диффузии фазы" и определяет спектральную ширину любого генератора излучения.

1. Гауссово перепутанное состояние как решение уравнения Шредингера для двух осцилляторов при параметрическом возбуждении. Параметрическое возбуждение двух электромагнитных мод описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}p_1^2 + \kappa_1 q_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}p_2^2 + \kappa_2 q_2^2\right) + \mu(t) q_1 q_2, \tag{1}$$

где

$$\mu(t) = \mu_0 \sin \Omega t \tag{2}$$

– параметрическая накачка, включаемая в момент времени $t = 0$. Хотя в работе используются традиционные квантово-механические обозначения p и q для канонически сопряженных наблюдаемых, следует иметь в виду, что они пропорциональны соответственно электрическому полю и векторному потенциалу моды в некоторой выделенной точке электромагнитного резонатора. Для размерностных проверок оставлены эффективные масса m и жесткости пружин κ_1 и κ_2 осцилляторов.

Гауссово перепутанное состояние

$$\Psi(q_1,q_2,t) = A(t)\exp[-\langle q|M|q\rangle l^{-2} + \langle q|\varepsilon\rangle + \Phi(t)], \tag{3}$$

где

$$\langle q| = \langle q_1, q_2|,\ M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta \\ \delta & \gamma_2 \end{pmatrix},\ |q\rangle = \left| \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\rangle,\ |\varepsilon\rangle = \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\rangle,\ l^2 = \frac{\hbar}{m\Omega}, \tag{4}$$

и $\gamma_1, \gamma_2, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – функции времени, удовлетворяет уравнению Шредингера, если матрица M подчиняется нелинейному матричному уравнению типа Рикатти:

$$i\frac{dM}{d\tau} = 2M^2 - \frac{1}{2}D,\quad D = D_0 + f\cdot D_1, \tag{5}$$

где

$$D_0 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ a = \frac{\omega_1}{\Omega};\ b = \frac{\omega_2}{\Omega};\ f = \frac{\mu_0}{m\Omega^2};\ \tau = \Omega t. \tag{6}$$

Вектор $|\varepsilon\rangle$ положим равным нулю, поскольку при этом состояние (3) является состоянием сжатого вакуума.

Матрица M определяет амплитудное и фазовое распределения в волновом пакете гауссова перепутанного состояния. Решением уравнения (5) является произведение

$$M = iX\cdot Y^{-1}, \tag{7}$$

где X и Y – матрицы 2×2, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{\hbar}DY,\ \frac{dY}{dt} = -\frac{2\hbar}{m}X. \tag{8}$$

Эта система, в отличие от уравнения (6), является линейной. Ее можно представить также в виде

$$\frac{dU}{d\tau} = A(\tau)U, \tag{9}$$

где $A(\tau)$ – блочная матрица и $U(\tau)$ – блочный столбец

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -2I & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{10}$$

I – единичная матрица. Поскольку коэффициенты этой системы зависят от времени периодически (с периодом $T = 2\pi/\Omega$), то это система Флоке.

В начальный момент времени матрица M произвольна

$$M = i\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}, \tag{11}$$

и, соответственно, положим

$$X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Согласно (10) и (12), начальные значения векторов U равны

$$U_1(0) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ U_2(0) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Далее отыскиваются два решения уравнения (10), удовлетворяющие начальным условиям (13). Тем самым будут найдены матрицы $X(\tau)$, $Y(\tau)$ и, соответственно, $M(\tau)$.

2. Решение Флоке для системы уравнений. Система уравнений (1.10) имеет четыре линейно независимых решения, которые ниже называются реперными и которые, согласно теореме Флоке, можно представить в виде

$$U = e^{i\kappa\tau}u(\tau), \tag{1}$$

где $u(\tau)$ – периодическая (четырехкомпонентная, как и $U(t)$) функция времени с тем же периодом $T = 2\pi/\Omega$, что и функция $\mu(t)$, и κ – функция частоты накачки Ω. Решения, удовлетворяющие начальным условиям (1.13), будут в дальнейшем представлены как суперпозиции реперных решений.

Для $u(\tau)$ имеем уравнение

$$u(\tau) + i\kappa u(\tau) = A(\tau)u(\tau). \tag{2}$$

В рассматриваемом случае матрица $A(\tau)$ имеет вид

$$A(\tau) = A_0 + \frac{1}{2}f \cdot A_1 \sin\tau, \tag{3}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}D_0 \\ -2I & 0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Вследствие периодичности переменной u ее можно представить в виде ряда Фурье

$$u(\tau) = \sum_n u_n \exp(in\tau). \tag{5}$$

Так как параметрическая накачка предполагается малой (f – малая величина), то, используя теорию возмущений, заключаем, что в нулевом приближении в разложении (5) достаточно ограничиться лишь двумя компонентами u_0 и u_1. Для них имеют место следующие выражения

$$u_0 = \begin{pmatrix} (i\sqrt{a}/2)e^{i\psi} \\ 0 \\ (1/\sqrt{a})e^{i\psi} \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (-i\sqrt{b}/2)e^{-i\psi} \\ 0 \\ (1/\sqrt{b})e^{-i\psi} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

При этом зависимость параметра κ от частоты накачки Ω определяется соотношениями

$$k = -a + \Delta, \ \Delta = -is\sqrt{ab}\exp(-2i\psi) = -\zeta \pm ir, \ \Delta^* = is\sqrt{ab}\exp(2i\psi), \tag{7}$$

где

$$\zeta = (1 - a - b)/2 \tag{8}$$

– расстройка, $s = f/4ab$ и

$$r = s\sqrt{ab}\sin\psi = \sqrt{s^2ab - \zeta^2}, \ \psi = \frac{1}{2}\arcsin(\zeta/s\sqrt{ab}), \tag{9}$$

т.е. нулевой расстройке соответствует $\psi = 0$. Наличие в Δ мнимой части указывает на существование нарастающих решений системы (1.9), т.е. условие

$$-s\sqrt{ab} < \zeta < s\sqrt{ab} \ \left(-\frac{\mu_0}{4m\sqrt{\omega_1\omega_2}} < \Delta\Omega < \frac{\mu_0}{4m\sqrt{\omega_1\omega_2}}, \ \Delta\Omega = \Omega - \omega_1 - \omega_2 \right) \tag{10}$$

как раз и есть условие параметрического резонанса.

3. Реперные векторы, начальные условия и матрица M. Используя (2.6) в соответствии с (2.1) и (2.5), получаем одно из решений системы (1.8) в виде

$$U_1 = u_0 \exp[-i(a-\Delta)\tau] + u_1 \exp[i(b-\Delta^*)\tau]. \tag{1}$$

Второе реперное решение получается из (1) заменой $\Delta \to \Delta^*$, $\psi \to \frac{\pi}{2} - \psi$. Третье и четвертое решения получаются из первых двух в результате комплексного сопряжения.

Начальные векторы (1.13) получатся, если реперные решения сложить с коэффициентами A, B, C и D, причем

$$A = \frac{1}{4\sqrt{ab}\cos 2\psi}[(a-2ix)\sqrt{b}e^{i\psi} + 2iz\sqrt{a}e^{-i\psi}], \tag{2}$$

и остальные коэффициенты получаются из A при заменах

$$(A \to B : z \to -z, \psi \to -\psi),\ (A \to C : x \to -x, z \to -z, \psi \to -\psi),\ (A \to D : x \to -x).$$

Таким образом, решение уравнения (1.9), удовлетворяющее первому начальному условию (1.13), имеет вид

$$\bar{U} = AU_1 + BU_2 + CU_3 + DU_4. \tag{3}$$

Аналогично отыскивается решение того же уравнения, удовлетворяющее второму начальному условию (1.13),

$$\bar{\bar{U}} = \bar{A}U_1 + \bar{B}U_2 + \bar{C}U_3 + \bar{D}U_4. \tag{4}$$

Коэффициенты $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ получаются из коэффициентов A, B, C, D в результате подстановки

$$A \to \bar{A}, B \to -\bar{B}, C \to \bar{C}, D \to -\bar{D}, a \leftrightarrow b, x \leftrightarrow -y, z \leftrightarrow -z, \psi \to -\psi.$$

В конечном счете элементы матриц X и Y определяются соотношениями

$$X_{11} = a\sqrt{ab}(e^- s_a^- + e^+ s_a^+) + 2x\sqrt{ab}(e^- c_a^- + e^+ c_a^+) - 2za(e^- - e^+)c_a^0, \tag{5}$$

$$X_{21} = ab(e^- - e^+)s_b^0 - 2xb(e^- - e^+)c_b^0 + 2z\sqrt{ab}(e^- c_b^- + e^+ c_b^+) \tag{6}$$

и

$$Y_{11} = 2\sqrt{ab}(e^- c_a^- + e^+ c_a^+) - 4x\sqrt{b/a}(e^- s_a^- + e^+ s_a^+) + 4z(e^- - e^+)s_a^0, \tag{7}$$

$$Y_{21} = 2a(e^- - e^+)c_b^0 + 4x(e^- - e^+)s_b^0 - 4z\sqrt{a/b}(e^- s_b^- + e^+ s_b^+), \tag{8}$$

где введены обозначения

$$e^{\pm} = e^{\pm r\tau}, \tag{9}$$

$$s_a^{\pm} = \sin[(a+\zeta)\tau \pm 2\psi], s_b^{\pm} = \sin[(b+\zeta)\tau \pm 2\psi], s_a^0 = \sin[(a+\zeta)\tau], s_b^0 = \sin[(b+\zeta)\tau],$$

$$c_a^{\pm} = \cos[(a+\zeta)\tau \pm 2\psi], c_b^{\pm} = \cos[(b+\zeta)\tau \pm 2\psi], c_a^0 = \cos[(a+\zeta)\tau], c_b^0 = \cos[(b+\zeta)\tau]. \tag{10}$$

Остальные элементы матриц X и Y получаются в результате подстановки

$$X_{11} \to X_{22},\ X_{21} \to X_{12},\ Y_{11} \to Y_{22},\ Y_{21} \to Y_{12},\ a \to b,\ b \to a,\ x \to y,\ y \to x.$$

В выражениях для элементов матриц X и Y опущен общий множитель

$$[4\sqrt{ab}\cos 2\psi]^{-1}, \tag{11}$$

так как вследствие (1.7) он не влияет на элементы матрицы M.

Следовательно, матрицы X и Y найдены и тем самым найдена матрица M. Знание эволюции гауссова перепутанного состояния позволит в дальнейшем оценить достижимые коэффициенты сжатия, особенно в случае достаточно сильного сужения спектральной линии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б ы к о в В. П. Квантовая электроника, **24(11)**, 973 (1997).

[2] Б ы к о в В. П. УФН, **161**, 145 (1991).

[3] К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1965, стр. 113.

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 10 ноября 2003 г.