

УДК 533.9.01

О ВЛИЯНИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА СОХРАНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ В ЛАГЕРР–ГАУССОВЫХ ПУЧКАХ

Е. О. Дмитриев^{1,2}, Ф. А. Корнеев^{1,2}

В работе рассмотрено влияние приближений, используемых при задании лазерных пучков, на результаты аналитических расчетов и численного моделирования движения электрона в поле циркулярно поляризованной моды Лагерра–Гаусса. Продемонстрировано, что для корректного описания передачи момента импульса лазерного пучка электрону необходимо учитывать поправки к параксиальному приближению и влияние огибающей одновременно.

Ключевые слова: орбитальный момент импульса, интеграл движения, параксиальное приближение, огибающая.

Введение. В последнее время становится возможным создание мощных лазерных импульсов с угловым орбитальным моментом [1]. Задача описания взаимодействия таких импульсов с плотной и разреженной плазмой включает в себя учёт коллективных эффектов, однако для разреженной плазмы может быть оправдано использование одночастичного приближения. Одним из интересных явлений, наблюдаемых в численном моделировании, является генерация квазистационарного магнитного поля при взаимодействии пространственно структурированных лазерных пучков, переносящих орбитальный момент импульса, с плазмой [2–4]. В этом случае проведённый детальный анализ позволяет заключить, что этот процесс может быть рассмотрен как результат взаимодействия лазерного пучка с одной частицей [5].

В общем случае симметрии, присущие плоской волне, нарушаются в структурированных пучках. Однако определённые пространственные структуры допускают сохранение некоторых из этих симметрий. Последние могут быть использованы при численном и аналитическом исследовании взаимодействия частиц с волной. С другой стороны,

¹ НИЯУ «МИФИ», 115409 Россия, Москва, Каширское ш., 31.

² ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: egor.o.dmitriev@gmail.com.

при некоторых условиях возможно определение параметров, приводящих к нарушению симметрий плоской волны. В таких ситуациях малость данных параметров характеризует малость нарушения исходных имметрий и соответствующих интегралов движения.

Уравнения движения электрона в циркулярно поляризованной моде Лагерра–Гаусса. Рассмотрим движение электрона (заряд электрона $-e < 0$) во внешнем электромагнитном поле, задаваемым векторным потенциалом \mathbf{A} . Запишем функцию Лагранжа частицы, измеряя длины в единицах k^{-1} , где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, время в единицах ω^{-1} , где ω – частота волны, векторный потенциал в единицах $a_0 A_0$, где $a_0 = \frac{eA_0}{mc^2}$, где m – масса электрона, A_0 – амплитуда векторного потенциала, импульс в единицах mc и энергию в единицах mc^2 :

$$L = -\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} - \mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (1)$$

Из функции Лагранжа получаются стандартные уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{E} - [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (2)$$

где $\mathbf{p} = \gamma\mathbf{v}$ – импульс электрона, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}$ – энергия электрона, $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$ – электрическое и магнитное поле, соответственно.

В цилиндрических координатах выражения для продольных компонент векторного потенциала циркулярно поляризованной моды Лагерра–Гаусса принимают вид

$$\begin{aligned} A_r &= a_0 \text{Re} \left(u_{pl}(r, \varphi, z) e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)} \right), \\ A_\varphi &= a_0 \text{Re} \left(-i\sigma_z u_{pl}(r, \varphi, z) e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_z = \mp 1$, причем знак “–” соответствует правой поляризации, а знак “+” – левой. Продольная компонента векторного потенциала A_z определяется из условия калибровки $\text{div}\mathbf{A} = 0$.

Функция $u_{pl}(r, \varphi, z)$ зависит только от координат и задаёт пространственную структуру электромагнитного пучка [6]

$$\begin{aligned} u_{pl}(r, \varphi, z) &= C^{(p,l)} \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \times \\ &\times \exp\left(-il\varphi - i\frac{r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} + i(2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $C^{(p,l)} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{p!}{(p+|l|)!}}$ – нормализующая константа, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$, $L_p^{|l|}$ – обобщенный полином Лагерра, $z_R = \frac{w_0^2}{2}$ – безразмерная длина Рэлея.

В силу слабой зависимости амплитуд потенциалов от координаты z , электромагнитное поле в параксиальном приближении локально близко к плоской волне, соответствующий приближенный интеграл движения [7]

$$\varepsilon - P_z = \varepsilon - p_z + A_z \approx 0, \quad (5)$$

где ε , P_z и p_z – кинетическая энергия, канонический импульс, сопряженный координате z , и продольная компонента импульса электрона, соответственно. За время наблюдения Δt этот интеграл набирает значение $\sim \frac{a_0}{w_0^2} \Delta t$, обладающее малостью за счет множителя $\frac{1}{w_0^2}$, где $w_0 \gg 1$ – характерный продольный размер пучка в безразмерных единицах. То есть в сравнении с энергией и импульсом данная величина будет в $w_0^2 \gg 1$ раз меньше.

Данную оценку можно получить, рассматривая трансляцию времени и координаты z на малую величину ϵ в действии электрона S . С одной стороны, используя уравнения движения, получаем вариацию действия $\delta S = \epsilon (P_z - \varepsilon) \Big|_{t_1}^{t_2}$, с другой, $\delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \operatorname{Re} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} e^{i(t-z)} dt$, где \mathbf{u} обозначает слабозависящую от координаты z амплитуду поля. Предполагая амплитуду колебаний скорости ~ 1 (в случае слабой интенсивности $\sim a_0$, поэтому оценка должна получиться завышенной), колебаний поля $\sim a_0$ и производную по $z \sim \frac{1}{w_0^2}$, и считая, что вклад в интеграл дает произведение осциллирующих вкладов в скорость и компоненты векторного потенциала, получим оценку, приведенную выше.

Функция $u_{pl}(r, \varphi, z)$ зависит от азимутального угла как $e^{-il\varphi}$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда A_r и A_φ содержат зависимость от времени и азимутального угла только в комбинации $t - (\sigma_z + l)\varphi$. Поскольку A_z определяется из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то и продольная компонента зависит от времени и угла таким же образом. Соответственно, функция Лагранжа (1) зависит только от этой же комбинации, что приводит к интегралу движения

$$\Sigma \equiv P_\varphi - (l + \sigma_z)H = \text{const}, \quad (6)$$

где $P_\varphi = L_z - rA_\varphi$ – канонический импульс, сопряженный азимутальному углу φ , $L_z = \gamma r^2 \dot{\varphi}$ – момент импульса электрона и $H = \gamma = \sqrt{1 + (\mathbf{P} + \mathbf{A})^2} = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$ – функция гамильтона частицы, в которой \mathbf{P} – канонический импульс электрона.

Для численного исследования движения частицы будем моделировать включение и выключение электромагнитного поля с помощью приближения медленно меняющейся огибающей $g(t - z)$ с характерной длительностью $\tau \gg 1$. Такое поле будем называть квазимонохроматическим. При вычислении электрического и магнитного полей огибающая должна считаться постоянной, чтобы не превышать первоначально заданную точность. Основной вклад при взаимодействии с частицей вносит область вблизи пика огибающей, где она может быть разложена в ряд Тейлора. Первый не постоянный член этого ряда имеет малость $\sim \frac{1}{\tau}$, что позволяет оценить точность данного приближения как $\sim \frac{a_0}{\tau}$. Помимо этого, огибающая не содержит зависимость от φ , что в случаях $l + \sigma_z \neq 0$ нарушает симметрию, необходимую для существования интеграла движения. В любом случае, величина Σ остается интегралом движения лишь с точностью до слагаемых $\sim \frac{a_0}{\tau}$, что приводит к изменению ее значения а время , взаимодействия на $\sim a_0$.

Еще одной причиной разрушения интеграла движения является использование параксиального приближения, в котором производные от функций u_{pl} по координате z считаются малыми и опускаются в некотором порядке. Характерное значение отклонения от интегралов движения при определении полей $\sim \frac{a_0}{w_0^2}$, что за все время взаимодействия дает $\sim \frac{a_0}{w_0^2} \tau$.

Движение электронов в циркулярно поляризованной моде Лагерра–Гаусса с огибающей. Рассмотрим взаимодействие изначально покоящегося электрона с циркулярно поляризованной модой Лагерра–Гаусса, заданной векторным потенциалом

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} g(t - z) \operatorname{Re} (u_{pl} e^{i(t-z-\sigma_z \varphi)}), \\ A_\varphi &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} g(t - z) \operatorname{Re} (-i \sigma_z u_{pl} e^{i(t-z-\sigma_z \varphi)}), \\ A_z &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} g(t - z) \operatorname{Re} \left(-i \frac{\partial u_{pl}}{\partial r} e^{i(t-z-\sigma_z \varphi)} + \frac{il}{r} \sigma_z u_{pl} e^{i(t-z-\sigma_z \varphi)} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Электрическое и магнитное поля должны быть определены с той же точностью, что и векторный потенциал. То есть должны быть отброшены слагаемые $\sim \frac{a_0}{\tau}$, возникающие от производных огибающей, и слагаемые $\sim \frac{a_0}{w_0^2}$, возникающие от производных u_{pl} .

Таким образом, для электрического и магнитного полей получаем

$$\begin{aligned}
 E_r = H_\varphi &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}g(t-z)\operatorname{Re}\left(-iu_{pl}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)}\right), \\
 E_\varphi = -H_r &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}g(t-z)\operatorname{Re}\left(-\sigma_z u_{pl}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)}\right), \\
 E_z &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}g(t-z)\operatorname{Re}\left(-\frac{\partial u_{pl}}{\partial r}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)} + \frac{l}{r}\sigma_z u_{pl}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)}\right), \\
 H_z &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}g(t-z)\operatorname{Re}\left(-i\sigma_z \frac{\partial u_{pl}}{\partial r}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)} + \frac{il}{r}u_{pl}e^{i(t-z-\sigma_z\varphi)}\right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Проанализируем с помощью численного моделирования уравнение (2) для первоначально покоящегося электрона в поле (8) с $p = 0$ и $l = 1$. Возьмем огибающую в виде $g(t) = \cos^2\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\pi\right)$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $g(t) = 0$ в ином случае.

Для определения точности сохранения интеграла движения будем сопоставлять величины Σ с кинетической энергией ε , поскольку последняя не является интегралом движения и входит в определение Σ . Поэтому разумно предположить, что интегра-

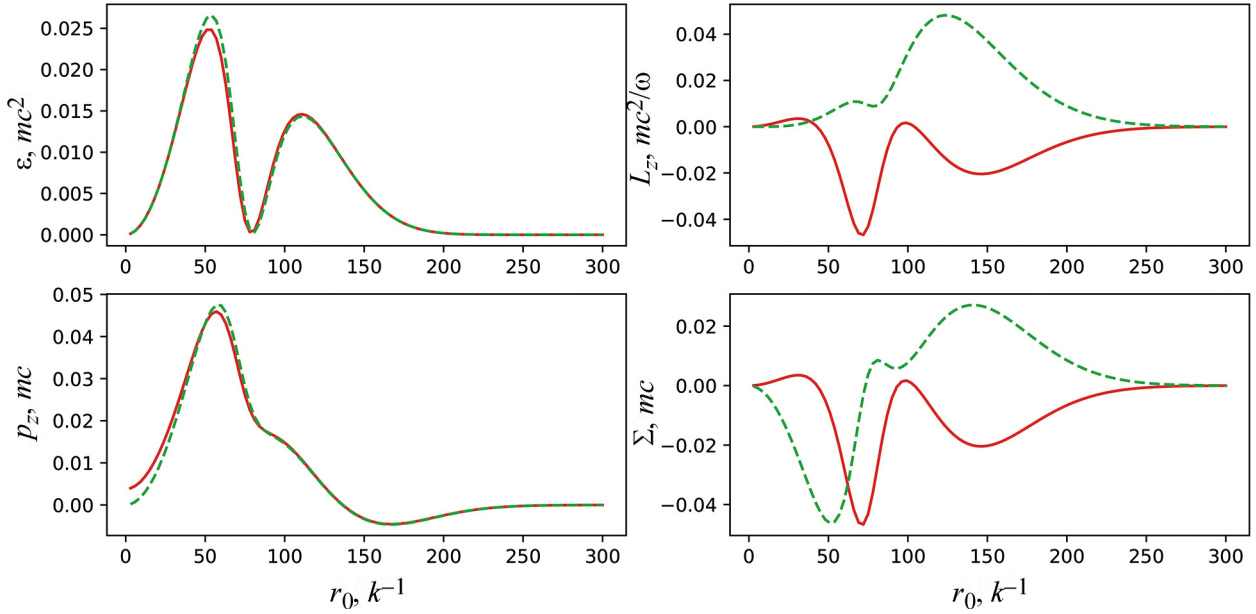


Рис. 1: Зависимость переданных электрону кинетической энергии ε , продольного импульса p_z , момента импульса L_z и Σ от начального расстояния электрона r_0 от оси пучка при движении в квазимонохроматической моде Лагерра–Гаусса с $w_0 = 10$ и $n = 12$, полученные при численном моделировании для левополяризованной (зеленая прерывистая линия) и правополяризованной (красная сплошная линия) мод.

лы движения можно считать сохраняющимися приближенно, если их величины будут малы в сравнении с величиной ε , то есть $\Sigma \ll \varepsilon$.

При параметрах $a_0 = 1$, $w_0 = 10$ и $n = 12$, где $n = \frac{\tau}{2\pi}$, влияние параксиального приближения и огибающей велико. Параметр $\frac{a_0}{w_0^2}\tau$ принимает значение ~ 0.1 , которое за счет численных коэффициентов может оказаться недостаточно малым для сохранения величины Σ , поэтому она получается сопоставимой с кинетической энергией ε (см. рис. 1). Величины Σ в этом случае не сохраняются, что определяется недостаточной точностью удовлетворения параксиального приближения и приближения медленно меняющейся огибающей.

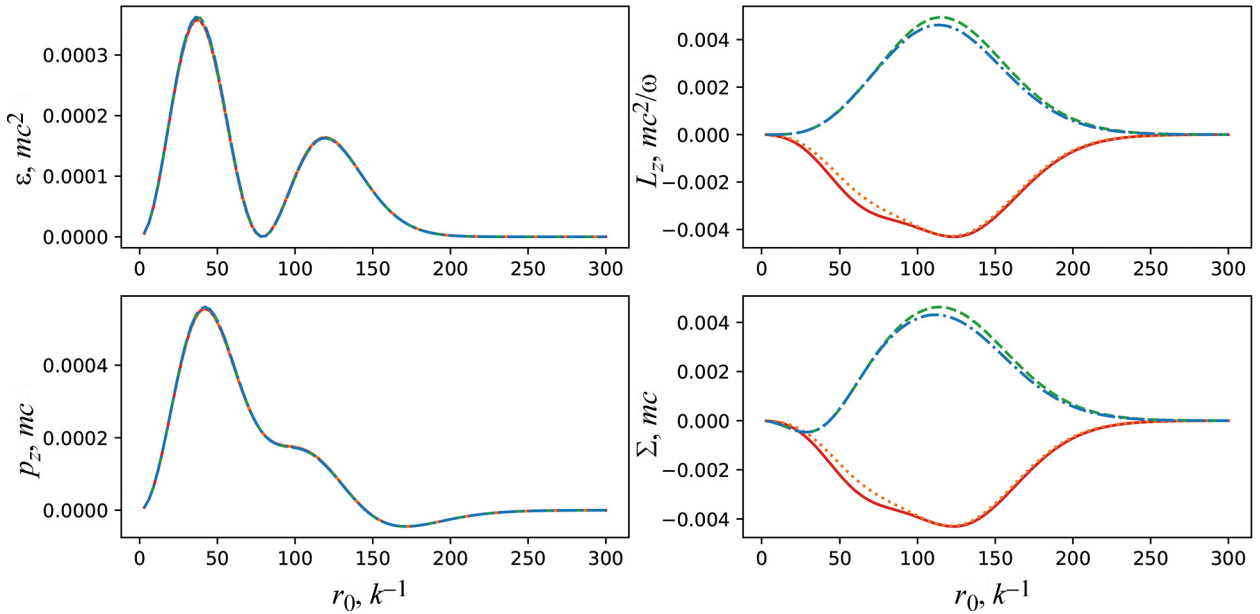


Рис. 2: Зависимость переданных кинетической энергии ε , продольного импульса p_z , момента импульса L_z и Σ от начального расстояния электрона r_0 от оси пучка при движении в квазимонохроматической моде Лагерра–Гаусса с $w_0 = 100$ и $n = 12$, полученные при численном моделировании для левополяризованной (зеленая прерывистая линия) и правополяризованной (красная сплошная линия) мод без учета производных по z от амплитуд и с их учетом (оранжевая линия из точек и синяя штрихпунктирная линия для право- и левополяризованной мод, соответственно).

Улучшим условия применимости параксиального приближения, взяв $w_0 = 100$. Результаты расчетов без и с учетом производных по z от амплитуд Лагерра–Гаусса, представленные на рис. 2, отличаются слабо, что говорит о том, что параксиальное при-

ближение выполняется с большой точностью. Однако, как видно, величина Σ не сохраняется и в этом случае, что говорит о необходимости учесть зависимость огибающей от $t - z$. Добавим к электрическим и магнитным полям слагаемые с производными от огибающей, вычисленные через векторный потенциал. Такие добавки являются, строго говоря, превышением точности, поскольку для их учета необходимо также учесть поправки к векторному потенциалу $\sim \frac{a_0}{\tau}$ при решении уравнений Максвелла.

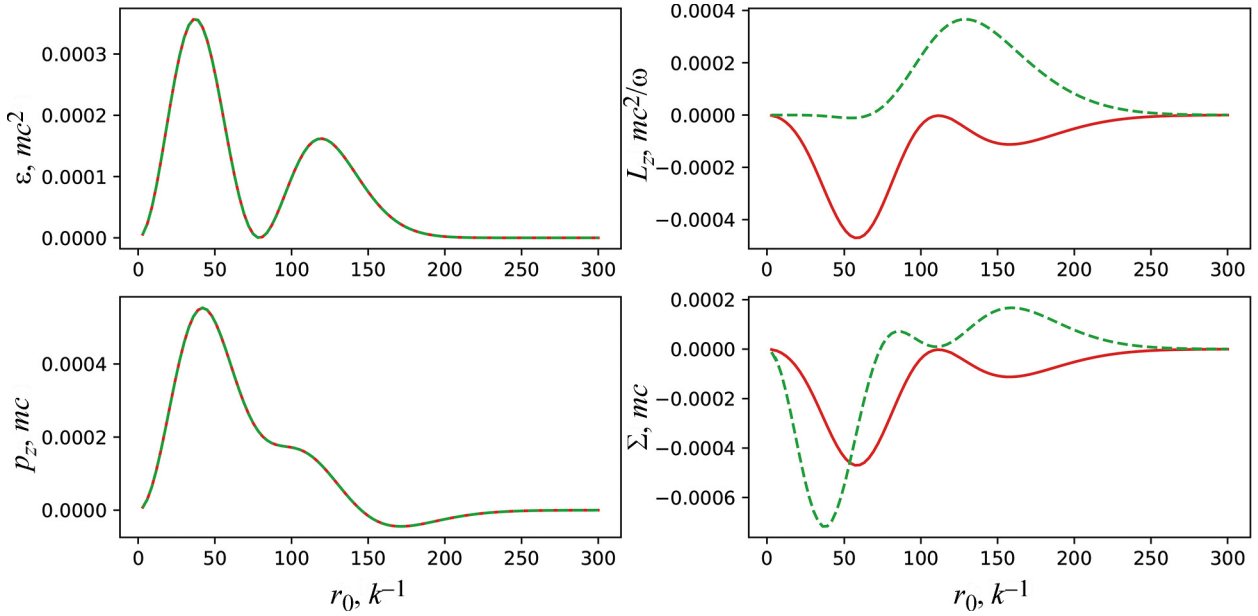


Рис. 3: Зависимость переданных кинетической энергии ε , продольного импульса p_z , момента импульса L_z и Σ от начального расстояния электрона r_0 от оси пучка при движении в квазимонохроматической моде Лагерра–Гаусса с $w_0 = 100$ и $n = 12$ с учетом производной от огибающей, полученные при численном моделировании для левополяризованной (зеленая прерывистая линия) и правополяризованной (красная сплошная линия) мод.

Зависимости, полученные в результате расчетов с учетом производных от огибающей, представлены на рис. 3. Величина Σ стала на порядок меньше, но все еще сопоставимой с энергией электрона. За несохранение Σ в этой ситуации ответственно только параксиальное приближение, которое при заданных параметрах вносит вклад $\sim \frac{a_0}{w_0^2} \tau \sim 10^{-3}$. За счет численных коэффициентов вклад может получаться меньше, что и видно на рис. 3.

При учете производных по координате z от амплитуд поля Σ становится малой в сравнении с ε , что видно из рис. 4. Однако, для корректного учёта этих поправок,

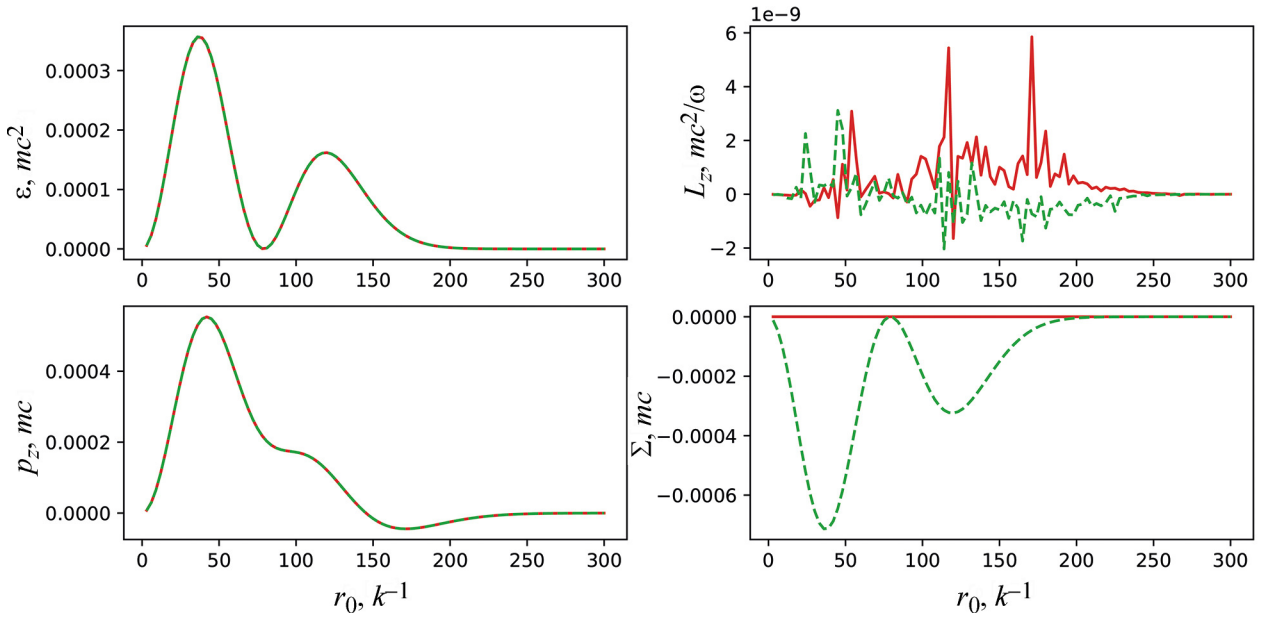


Рис. 4: Зависимость переданных кинетической энергии ε , продольного импульса p_z , момента импульса L_z и Σ от начального расстояния электрона r_0 от оси пучка при движении в квазимонохроматической моде Лагерра–Гаусса с $w_0 = 100$ и $n = 12$ с учетом производной от огибающей и амплитуды поля по координате z , полученные при численном моделировании для левополяризованной (зеленая прерывистая линия) и правополяризованной (красная сплошная линия) мод.

необходимо определение самих полей (7) с той же точностью. В случае левой поляризации Σ не является интегралом движения, поскольку огибающая не содержит угла φ . Добавление зависимости огибающей от φ восстановит сохранение Σ , если при этом также добавить слагаемые с производными от огибающей по углу φ .

Заключение. Обсуждаемые приближения играют важную роль при описании взаимодействия структурированной световой волны с заряженной частицей. Для того чтобы переданный частице момент импульса оказался больше ошибок, определяемых пренебрежением переменностью огибающей и точностью паракисального приближения, необходимо выполнение двух неравенств $L_z \gg a_0$ и $L_z \gg \frac{a_0}{w_0^2} \tau$, соответственно. Удовлетворение обоих условий приводит к ограничению на безразмерную длительность импульса $\tau \lesssim w_0^2$, что не позволяет неограниченно увеличивать длительность импульса в численном расчете без привлечения поправок к сделанным приближениям. В случае гауссовых пучков в работе [10] было отмечено, что для коротких импульсов $\tau \lesssim 2w_0$

необходимо учитывать поправки, возникающие за счет влияния огибающей. Таким образом, возможность пренебрежения формой огибающей определяется ещё более жёстким условием $w_0 \ll \tau \lesssim w_0^2$.

Поскольку при добавлении слагаемых, необходимых для сохранения интегралов движения, однако, превышающих точность определения полей в (7), менялась в основном величина Σ , а не энергия, можно сделать вывод, что эти добавки определяют поглощение момента импульса. Таким образом, для корректного описания передачи момента импульса частице в структурированном электромагнитном поле необходимо как при решении уравнений Максвелла, так и при рассмотрении уравнений движения учитывать поправки и к паракисальному приближению, и к медленно меняющейся огибающей.

Авторы выражают благодарность В. Т. Тихончуку и R. Nuter за плодотворные обсуждения. Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”. При моделировании использовались вычислительные ресурсы Центра Высокопроизводительных Расчётов НИЯУ МИФИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Q. Zhan, *Advances in Optics and Photonics* **1**(1), 1 (2009). DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [2] S. Ali, J. R. Davies, J. T. Mendonca, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 035001 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.035001>.
- [3] Z. Léczy, I. V. Konoplev, A. Seryi, A. Andreev, *Nature: Scientific Reports* **6**, 36139 (2016). DOI: 10.1038/srep36139.
- [4] W. Wang, B. Shen, X. Zhang, et al., *Sci. Rep.* **5**, 8274 (2015). DOI: 10.1038/srep08274.
- [5] R. Nuter, Ph. Korneev, I. Thiele, V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. E* **98**(3), 033211 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevE.98.033211.
- [6] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**(11), 8185 (1992). DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, том II. Теория поля* (М., Наука, 1973).
- [8] R. Nuter, Ph. Korneev, E. Dmitriev, et al., *Phys. Rev. E* **101**(5), 053202 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.053202.
- [9] V. T. Tikhonchuk, Ph. Korneev, E. Dmitriev, R. Nuter, *High Energy Density Physics* **37**, 100863 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.hedp.2020.100863>.

- [10] Brice Quesnel, Patrick Mora, Phys. Rev. E **58**(3), 3719 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevE.58.3719.

Поступила в редакцию 23 ноября 2021 г.

После доработки 20 декабря 2021 г.

Принята к публикации 21 декабря 2021 г.

Публикуется по рекомендации оргкомитета V Международной конференции “Сверхбыстрые Оптические Явления” (UltrafastLight-2021), Москва.