

УДК 523.9: 534.2

ФАЗОВЫЙ СДВИГ МЕЖДУ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ТЕМПЕРАТУРЫ, ДАВЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

Н. Е. Молевич^{1,2}, Д. С. Рящиков^{1,2}, Д. И. Завершинский^{1,2},
С. А. Белов^{1,2}

Рассмотрена газодинамическая модель тепловыделяющей среды, включающая обобщенную функцию тепловыделения, зависящую от температуры и плотности. При распространении акустической волны в такой среде возникает тепловой дисбаланс, приводящий к затуханию или усилению волны. Примером такой среды является корональная плазма. Используя понятие эффективного комплексного показателя адиабаты, получены компактные аналитические выражения величин фазового сдвига между возмущениями температуры, давления и плотности в акустической волне в среде с тепловым дисбалансом с учетом влияния теплопроводности.

Ключевые слова: тепловой дисбаланс, показатель адиабаты, волны, солнечная корона.

Введение. Акустические волны в средах с тепловыделением подвержены поглощению или усилению за счет возникновения теплового дисбаланса. Примером среды с тепловым дисбалансом является космическая плазма, в том числе солнечная корональная плазма. Явление теплового дисбаланса заключается в нарушении теплового равновесия между процессами тепловыделения и теплоотвода при распространении газодинамического возмущения. Если мощность тепловыделения в среде растет сфазировано с областями сжатия в акустической волне (положительная обратная связь), то это приводит к нарастанию волны и акустической неустойчивости (в астрофизике более распространен

¹ Самарский филиал Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, 443011 Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: dimar@fian.smr.ru.

² Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С. П. Королёва, 443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34.

термин изоэнтропическая неустойчивость) [1, 2]. Если же тепловыделение, наоборот, падает в области сжатия и растет в области разрежения, то акустическая волна будет затухать. В работах [3, 4] показано, что этот механизм затухания магнитоакустических волн в корональных петлях может являться доминирующим. В корональных петлях также наблюдается значительный фазовый сдвиг между возмущениями температуры и плотности в акустической волне [5–8]. Этот фазовый сдвиг формируется совместным действием теплового дисбаланса и теплопроводности [9, 10]. В настоящей работе аналитически получена частотная зависимость величины фазового сдвига от параметров среды, свойств тепловыделения и теплоотвода.

Фазовые сдвиги с учетом теплового дисбаланса. Описание свойств акустических возмущений в тепловыделяющей среде будем производить с помощью системы уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P, \quad C_V \frac{dT}{dt} - \frac{k_B T}{m \rho} \frac{d\rho}{dt} = -\mathfrak{S}(\rho, T), \quad P = \frac{k_B}{m} \rho T. \quad (1)$$

Здесь d/dt – субстанциональная производная; ρ, T, P – плотность, температура и давление, соответственно; \mathbf{v} – вектор скорости; C_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме; k_B – постоянная Больцмана; m – средняя масса частицы; $\mathfrak{S}(\rho, T)$ – так называемая обобщённая функция тепловых потерь [1], представляющая собой разность мощностей охлаждения и нагрева среды:

$$\mathfrak{S}(\rho, T) = L(\rho, T) - Q(\rho, T). \quad (2)$$

В стационарном состоянии (обозначено индексами “0”) мощность нагрева и охлаждения компенсируют друг друга, и функция тепловых потерь

$$\mathfrak{S}(\rho_0, T_0) = 0. \quad (3)$$

Стационарное состояние полагается однородным и неподвижным. Отметим, что система (1) применяется для описания медленных магнитоакустических волн, распространяющихся в корональных трубках в приближении бесконечного магнитного поля [3, 11].

Так как в общем случае мощности охлаждения $L(\rho, T)$ и нагрева $Q(\rho, T)$ по-разному зависят от температуры и плотности, то при распространении акустического возмущения тепловое равновесие (3) нарушается и возникает тепловой дисбаланс. Оценим влияние этого дисбаланса на фазовые сдвиги между возмущениями давления, температуры и плотности. После линеаризации (1) относительно одномерных акустических

возмущений $\sim \exp(-i\omega t + ikx)$ с частотой ω и волновым вектором k получаем связи между возмущениями давления P' , температуры T' и плотности ρ' , а также дисперсионное соотношение в виде

$$\frac{P'}{p_0} = \gamma_{\text{eff}} \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad (4)$$

$$\frac{T'}{T_0} = (\gamma_{\text{eff}} - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad (5)$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \gamma_{\text{eff}} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (6)$$

где γ_{eff} – эффективный комплексный показатель адиабаты, определяемый как [2, 12, 13]:

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{\gamma_0 - i\gamma\omega\tau_V}{1 - i\omega\tau_V}, \quad (7)$$

$$\tau_V = C_V/\mathfrak{S}_{0T}, \quad (8)$$

$$\gamma_0 = 1 - (\rho_0\mathfrak{S}_{0\rho})/(T_0\mathfrak{S}_{0T}). \quad (9)$$

Здесь τ_V – характерное время, связанное с процессами тепловыделения, γ_0 – эффективный низкочастотный показатель адиабаты. Индексами при функции тепловых потерь обозначены её производные по температуре и плотности в стационарном состоянии: $\mathfrak{S}_{0\rho} = (\partial\mathfrak{S}/\partial\rho)_{T=T_0, \rho=\rho_0}$, $\mathfrak{S}_{0T} = (\partial\mathfrak{S}/\partial T)_{T=T_0, \rho=\rho_0}$.

Из дисперсионного соотношения (6) легко определить декремент затухания и скорость звука в среде с тепловым дисбалансом, как это сделано, например, в [2, 12, 13]. И декремент, и скорость зависят от частоты, причем скорость меняется от низкочастотного значения $c_0 = \sqrt{\gamma_0 k_B T_0/m}$, которое полностью определяется низкочастотным показателем адиабаты γ_0 , то есть свойствами обобщенной функции тепловыделения, до скорости звука $c_s = \sqrt{\gamma k_B T_0/m}$ в высокочастотном пределе, где $\gamma = C_P/C_V$, C_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении. Для плазмы солнечной короны $\gamma=5/3$.

Связи(4), (5) позволяют определить искомые фазовые сдвиги ϕ_P, ϕ_T , которые тоже зависят от частоты в виде

$$\text{tg } \phi_P = \frac{\text{Im } \gamma_{\text{eff}}}{\text{Re } \gamma_{\text{eff}}} = \frac{(\gamma_0 - \gamma)\omega\tau_V}{\gamma_0 + \gamma\omega^2\tau_V^2}, \quad (10)$$

$$\text{tg } \phi_T = \frac{\text{Im}(\gamma_{\text{eff}} - 1)}{\text{Re}(\gamma_{\text{eff}} - 1)} = \frac{(\gamma_0 - \gamma)\omega\tau_V}{(\gamma_0 - 1) + (\gamma - 1)\omega^2\tau_V^2}, \quad (11)$$

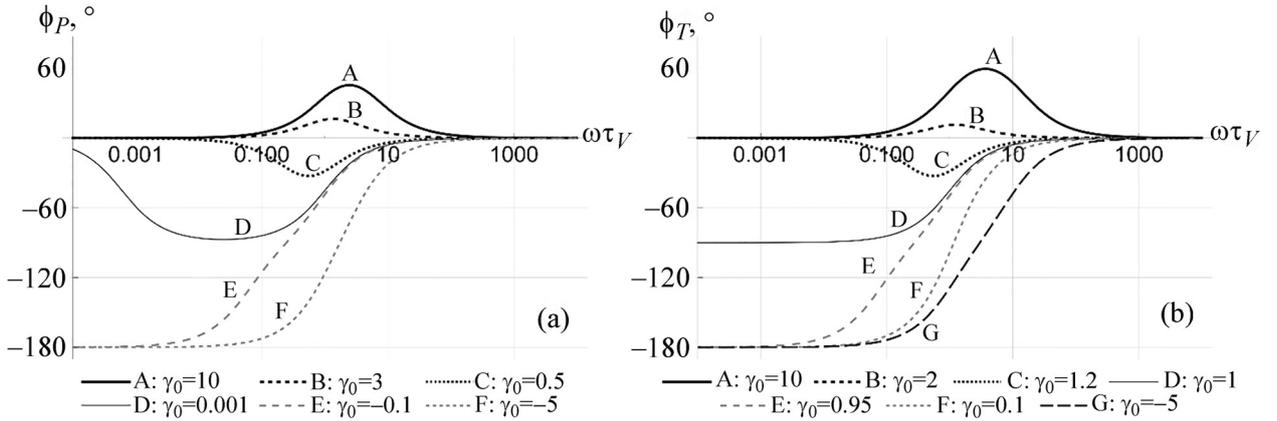


Рис. 1: Фазовый сдвиг между (а) давлением и плотностью и (б) температурой и плотностью в зависимости от безразмерной частоты при различном эффективном низкочастотном показателе адиабаты γ_0 и $\tau_V > 0$.

где ϕ_P – фазовый сдвиг между возмущениями давления и плотности, ϕ_T – фазовый сдвиг между возмущениями температуры и плотности.

Зависимость фазового сдвига ϕ_P, ϕ_T от частоты при различных γ_0 в изохорически устойчивой среде ($\tau_V > 0$) приведена на рис. 1. Отметим, что в случае изоэнтропической неустойчивости ($\gamma_0 > \gamma$) фазовый сдвиг положительный, а в противном случае – отрицательный. Частоты, на которых фазовый сдвиг максимален, и сами значения максимального фазового сдвига могут быть найдены с помощью выражений (12), (13):

$$\operatorname{tg} \phi_{P_{\max}} = \frac{\operatorname{Sign}(\tau_V)(\gamma_0 - \gamma)}{2\sqrt{\gamma_0\gamma}}, \quad \omega_{\max|\tau_V|} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma}}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \phi_{T_{\max}} = \frac{\operatorname{Sign}(\tau_V)(\gamma_0 - \gamma)}{2\sqrt{\gamma_0 - 1}\sqrt{\gamma - 1}}, \quad \omega_{\max|\tau_V|} = \sqrt{\frac{(\gamma_0 - 1)}{(\gamma - 1)}}. \quad (13)$$

При $\omega\tau_V \gg 1$ возмущения температуры, давления и плотности синфазны, а при $\omega\tau_V \ll 1$ могут быть в фазе либо в противофазе в зависимости от значения γ_0 .

Фазовые сдвиги с учетом теплового дисбаланса и теплопроводности. Применительно к корональным петлям вклад в наблюдаемый фазовый сдвиг могут вносить и диссипативные процессы, связанные, например, с вязкостью и теплопроводностью. При этом вклад от вязкости применительно к корональным условиям пренебрежимо мал, а вклад от теплопроводности необходимо учитывать [9, 10].

С учётом теплопроводности уравнение энергии в системе (1) примет вид:

$$C_V \frac{dT}{dt} - \frac{k_B T}{m\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\mathfrak{S}(\rho, T) + \frac{\kappa}{\rho} \Delta T, \quad (14)$$

где κ – коэффициент теплопроводности.

После процедуры линеаризации (1), (14) с учетом условия теплового равновесия (3) опять получаем выражения (4)–(6) с эффективным показателем адиабаты вида [14]:

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{\gamma_0 - i\gamma\omega\tau_V + k^2\tau_\kappa\tau_V\gamma P_0/\rho_0}{1 - i\omega\tau_V + k^2\tau_\kappa\tau_V\gamma P_0/\rho_0}. \quad (15)$$

Здесь $\tau_\kappa = \kappa/(C_P P_0)$ – характерное время, связанное с теплопроводностью.

Подставим k^2 из дисперсионного соотношения (6) в (15). Тогда получим квадратное уравнение (16) относительно γ_{eff} , которое имеет решения (17):

$$(1 - i\omega\tau_V)\gamma_{\text{eff}}^2 - (\gamma_0 - i\gamma\omega\tau_V(1 - i\omega\tau_\kappa))\gamma_{\text{eff}} - \gamma\omega^2\tau_V\tau_\kappa = 0, \quad (16)$$

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{\gamma_0 - i\gamma\omega\tau_V - \epsilon\gamma\omega^2\tau_V^2 \pm \sqrt{4\epsilon\gamma\omega^2\tau_V^2(1 - i\omega\tau_V) + (-\gamma_0 + i\gamma\omega\tau_V + \epsilon\gamma\omega^2\tau_V^2)^2}}{2(1 - i\omega\tau_V)}, \quad (17)$$

$$\epsilon = \tau_\kappa/\tau_V. \quad (18)$$

Выражение (17) описывает эффективный показатель адиабаты для акустической и тепловой волны. Параметр ϵ равен отношению характерного времени теплопроводности τ_κ к характерному времени тепловыделения τ_V . Фазовые сдвиги ϕ_P, ϕ_T определяются аналогично (10), (11), где γ_{eff} определяется с помощью выражения (17).

Влияние теплопроводности на величину эффективного показателя адиабаты γ_{eff} наиболее существенно для волн с частотами, сравнимыми или больше обратного характерного времени τ_κ^{-1} , то есть $\omega\tau_\kappa \gtrsim 1$. Для волн же с частотами меньшими τ_κ^{-1} ($\omega\tau_\kappa \ll 1$), влиянием теплопроводности на свойства волн можно пренебречь. В частотном случае, когда теплопроводность слаба $\tau_\kappa \rightarrow 0$, указанное ранее условие выполняется для всех частот спектра.

Наибольшие же изменения эффективного показателя адиабаты γ_{eff} , обусловленные нагревом и охлаждением, происходят в области частот, меньших или сравнимых с обратным характерным временем τ_V^{-1} , то есть $\omega\tau_V \lesssim 1$. Таким образом, влиянием нагрева/охлаждения на показатель адиабаты можно пренебречь для частот $\omega\tau_V \gg 1$. В частности, когда мощность нагрева и охлаждения пренебрежимо мала или не зависит от температуры, характерное время $\tau_V \rightarrow \infty$, это условие выполняется для всех частот спектра.

Таким образом, можно утверждать, что при $\epsilon \ll 1$ теплопроводность и тепловыделение действуют на разных временных масштабах, а при $\epsilon \gtrsim 1$ можно говорить о

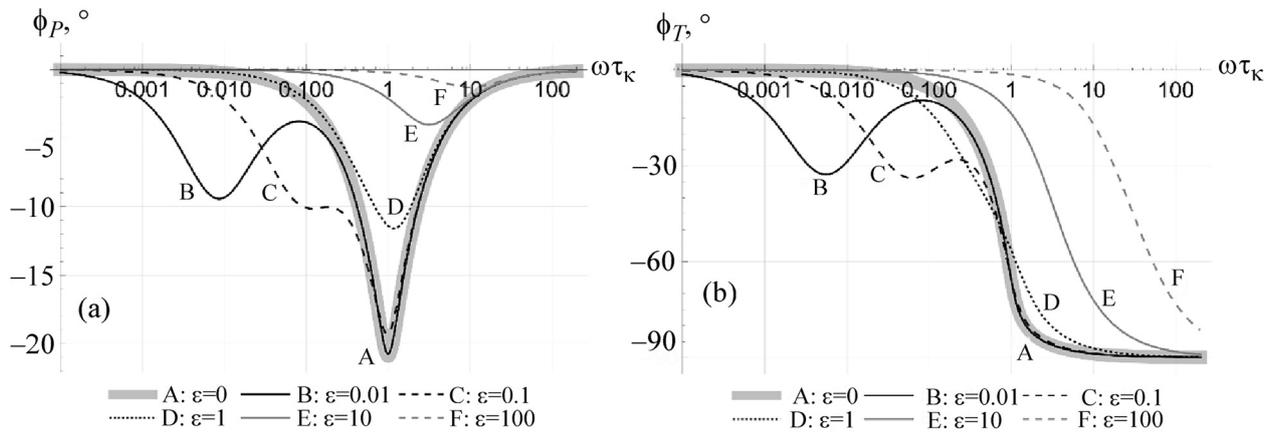


Рис. 2: Фазовый сдвиг между (а) давлением и плотностью и (б) температурой и плотностью в зависимости от $\omega\tau_\kappa$ при различных соотношениях характерных времён теплопроводности и процессов тепловыделения $\epsilon = \tau_\kappa/\tau_V$ в устойчивой среде при $\gamma_0 = 1, 2$.

совместном влиянии теплопроводности и тепловыделения на поведение волн в некотором диапазоне частот.

В частном случае, когда тепловыделением можно пренебречь ($\tau_V \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$), из выражения (17) можно получить известную формулу для фазового сдвига между температурой и плотностью [6–8]:

$$\text{tg } \phi_T = -\frac{\kappa\omega}{P_0 C_P} = -\omega\tau_\kappa. \tag{19}$$

Пример совместного влияния теплопроводности и тепловыделения в общем случае приведён на рис. 2. При этом были выбраны такие параметры функции тепловыделения, чтобы рассматриваемая среда была устойчивой.

Случай, когда вкладом тепловыделения можно пренебречь ($\tau_V \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$), показан на рис. 2 с помощью широкой серой кривой. При данном условии максимальный фазовый сдвиг между давлением и плотностью наблюдается при $\omega\tau_\kappa = 1$. При этом фазовый сдвиг между температурой и плотностью стремится к нулю при $\omega\tau_\kappa \ll 1$ и стремится $\kappa - \pi/2$ при $\omega\tau_\kappa \gg 1$.

При $\epsilon \ll 1$ можно отметить наличие экстремума ϕ_P и ϕ_T на частотах $\omega\tau_V \sim 1$ или, что одно и то же, $\omega\tau_\kappa \sim \epsilon$. Более точно значения этих частот можно определить по формулам (12), (13). На более высоких частотах $\omega\tau_\kappa > \epsilon$ фазовые сдвиги практически совпадают со случаем, когда тепловыделение отсутствует, то есть основной вклад идет только от эффекта теплопроводности. Из представленного можно сделать вывод о том,

что фазовый сдвиг из-за теплопроводности и тепловыделения при $\epsilon \ll 1$ можно рассматривать как сумму фазовых сдвигов из-за каждого из представленных эффектов по отдельности.

Однако при $\epsilon \gtrsim 1$ можно говорить о совместном влиянии теплопроводности и тепловыделения в некотором диапазоне частот. Фазовый сдвиг между давлением и плотностью уменьшается с ростом ϵ , а максимальное значение отмечается при $\omega\sqrt{\tau_V\tau_\kappa} \sim 1$. Отметим наличие лишь одного экстремума в отличие от случая $\epsilon \ll 1$. Однако фазовый сдвиг между температурой и плотностью изменяется от 0 при $\gamma_0 > 1$ ($-\pi$ при $\gamma_0 < 1$) до $-\pi/2$ при частотах $\omega\tau_\kappa \sim \epsilon$ или, что то же самое, при $\omega\tau_V \sim 1$.

Обсуждение результатов. В работе получены выражения для фазовых сдвигов между давлением и плотностью и между температурой и плотностью с учётом процессов нагрева и охлаждения среды, зависящих от температуры и плотности, и с учётом процесса теплопроводности. В отсутствие теплопроводности найдены максимальные значения фазовых сдвигов и определены частоты, на которых они отмечаются.

При учёте теплопроводности показано, что, когда отношение характерных времён теплопроводности и тепловыделения $\tau_\kappa/\tau_V \ll 1$, итоговый фазовый сдвиг является суммой фазовых сдвигов из-за каждого эффекта по отдельности.

При $\tau_\kappa/\tau_V \gtrsim 1$ совместные действия теплопроводности и тепловыделения уменьшают максимальный фазовый сдвиг между давлением и плотностью по сравнению с независимым учетом этих эффектов. Кроме того, частота, при которой достигается максимальный фазовый сдвиг, изменяется до $\omega_{\max}\sqrt{\tau_V\tau_\kappa} \approx \epsilon$. Фазовый сдвиг между температурой и плотностью изменяется от 0 (или $-\pi$) до $-\pi/2$, однако переходная область наблюдается на частотах $\omega\tau_V \sim 1$, определяемых не теплопроводностью, а тепловыделением.

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках государственного задания вузам и научным организациям, проекты 0023-2019-0003, FSSS-2020-0014.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. B. Field, ApJ **142**, 531 (1965).
- [2] Н. Е. Молевич, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ **94**(3), 128 (1988).
- [3] D. Y. Kolotkov, V. M. Nakariakov, D. I. Zavershinskii, A&A **628**, A133 (2019). DOI:10.1051/0004-6361/201936072.
- [4] D. Y. Kolotkov, D. I. Zavershinskii, V. M. Nakariakov, Plasma Physics and Controlled Fusion **63**(12), 123008 (2021). DOI: 10.1088/1361-6587/ac36a5.

- [5] N. R. Owen, I. De Moortel, A. W. Hood, *A&A* **494**(1), 339 (2009). DOI: 10.1051/0004-6361:200810828.
- [6] T. Wang, L. Ofman, X. Sun, et al., *The Astrophysical Journal Letters* **811**, L13 (2015). DOI: 10.1088/2041-8205/811/1/L13.
- [7] T. Van Doorselaere, N. Wardle, G. Del Zanna, et al., *The Astrophysical Journal Letters* **727**(2), L32 (2011). DOI:10.1088/2041-8205/727/2/L32.
- [8] S. K. Prasad, J. O. Raes, T. Van Doorselaere, et al., *ApJ* **868**(2), 149 (2018). DOI: 10.3847/1538-4357/aae9f5.
- [9] A. Prasad, A. K. Srivastava, T. Wang, *Solar Physics* **296**, 105 (2021). DOI:10.1007/s11207-021-01846-w.
- [10] A. Prasad, A. K. Srivastava, T. Wang, K. Sangal, *Solar Physics* **297**, 5 (2022). DOI:10.1007/s11207-021-01940-z.
- [11] D. I. Zavershinskii, D. Y. Kolotkov, V. M. Nakariakov, et al., *Physics of Plasmas* **26**, 082113 (2019). DOI:10.1063/1.5115224.
- [12] D. I. Zavershinskii, N. E. Molevich, D. S. Riashchikov, S. A. Belov, *Physical Review E* **101**(4), 043204 (2020). DOI:10.1103/PhysRevE.101.043204.
- [13] N. Molevich, D. Riashchikov, *Physics of Fluids* **33**(7), 076110 (2021). DOI: 10.1063/5.0053394.
- [14] N. E. Molevich, D. S. Ryashchikov, D. I. Zavershinskiy, *Magnetohydrodynamics* **52**(1), 199 (2016). DOI: 10.22364/mhd.52.1-2.23.

Поступила в редакцию 8 апреля 2022 г.

После доработки 27 июля 2022 г.

Принята к публикации 29 июля 2022 г.