

УДК 537.52;0.3;0.4

## КОЭФФИЦИЕНТ ТАУНСЕНДА И УБЕГАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ГЕЛИИ ПРИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СКОРОСТЯХ

А. Н. Ткачев, С. И. Яковленко

*Рассмотрен режим размножения электронов при больших напряженностях поля, когда электрон на длине размножения может набрать релятивистскую кинетическую энергию. Показано, что даже в таких сверхсильных полях Таунсендовский механизм размножения электронов справедлив, если расстояние между электродами достаточно велико. Получены значения коэффициента Таунсенда и дрейфовой скорости для таких полей.*

На основе моделирования методом динамики многих частиц было выявлено [1 – 3], что если расстояние между электродами достаточно велико, то Таунсендовский режим ионизации реализуется даже в больших полях, при которых можно пренебречь ионизационным трением, и согласно традиционной точке зрения средняя энергия электронов должна непрерывно увеличиваться [4 – 6]. При этом коэффициент Таунсенда немонотонно зависит от отношения напряженности поля к давлению. Немонотонность коэффициента размножения приводит к двузначности кривых, разграничивающих область интенсивного размножения электронов и область ухода электронов без размножения (аналоги кривых Пашена). Эти представления приобретают дополнительную актуальность в связи с получением электронных пучков субнаносекундной длительности с рекордной амплитудой тока (в воздухе  $\sim 70$  А, в гелии  $\sim 200$  А) при атмосферном давлении [7].

Ранее были рассмотрены не очень большие напряжения, когда можно пренебречь релятивистскими эффектами. Поскольку стало возможно создание генераторов, в которых мегавольтные напряжения достигаются за наносекунду, представляет интерес рассмотреть вопрос о том, насколько применимо понятие коэффициента Таунсенда при

релятивистских скоростях электронов. Ниже этот вопрос рассмотрен на примере гелия.

### Размножение и прилипание электронов

*Использованная модель.* Моделирование размножения и убегания электронов в гелии было проведено на основе одной из модификаций метода частиц [8]. Рассматривалось размножение и перенос электронов между плоскостями, расположенными на расстоянии  $d$ , находящимися под напряжением  $U$  (напряженность поля  $E = U/d$ ). Напряжение считалось постоянным и поданным задолго до появления рассматриваемых электронов. Электроны рождались на катоде с хаотически направленной скоростью и начальной энергией, распределенной по Пуассону со средним значением  $\varepsilon_0 = 0.2 \text{ эВ}$ . На малых временных шагах решались уравнения движения всех электронов и с вероятностями, определяемыми сечениями элементарных процессов, разыгрывались упругие и неупругие столкновения.

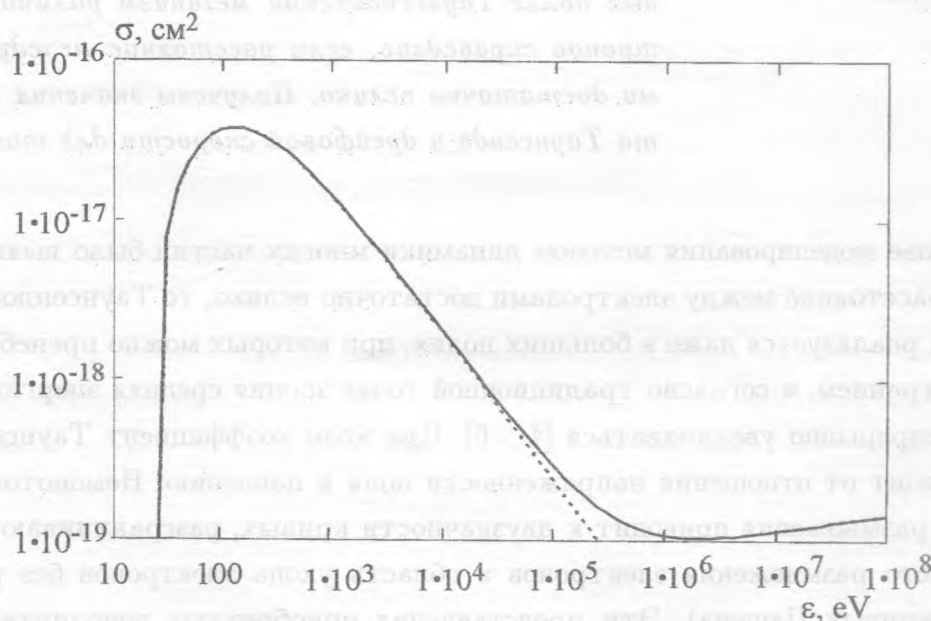


Рис. 1. Зависимость сечения ионизации атома гелия от энергии налетающего электрона. Сплошная кривая – сечение, использованное в данной работе; пунктир – сечение, использованное в работе [1].

Использованные в работе сечения для различных элементарных актов приведены в работе [1]. Однако, в отличие от работы [1], для сечения ионизации использовалась аппроксимация, учитывающая релятивистские эффекты:

$$\sigma_i(\varepsilon) = \frac{f_1(\varepsilon) \cdot f_2(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon) + f_2(\varepsilon)} \cdot c m^2, \quad f_1(\varepsilon) = 1.3 \cdot 10^{-18} (\varepsilon - I) \frac{1 + 3 \cdot 10^{-6} (\varepsilon - I)^2}{1 + 0.009 \cdot (\varepsilon - I)},$$

$$f_2(\varepsilon) = 2.05 \cdot 10^{-15} \left\{ \frac{2.36}{\varepsilon} + \frac{2\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[ \ln \frac{\varepsilon}{I} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} + \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)^2}{16\gamma^2} \right] \right\}.$$

Здесь  $\varepsilon = m_e c^2 (\gamma - 1)$  – кинетическая энергия налетающего электрона (за вычетом массы покоя), выраженная в эВ;  $I = 24$  эВ – энергия ионизации атома гелия;  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ;  $v$  – скорость электрона. Отметим, что сечение имеет минимум при  $\varepsilon \approx 4m_e c^2 \approx 2 \cdot 10^6$  эВ (рис. 1).

**Траектория электрона.** Пусть электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$  направлено по оси  $x$ , а электрон в начальный момент времени  $t = 0$  имеет координаты  $x(0)$ ,  $y(0)$  и  $z(0) = 0$  и импульсы  $p_x(0)$ ,  $p_y(0)$  и  $p_z(0)$ .

Решение уравнений движения  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \equiv e\mathbf{E}$  дает для импульса в произвольный момент времени  $t$

$$p_x(t) - p_x(0) = F \cdot t; \quad p_y(t) - p_y(0) = 0; \quad p_z(t) - p_z(0) = 0. \quad (1)$$

Скорости выражаются через импульсы с помощью справедливого для любого момента времени  $t$  соотношения [9]:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{p}(t) \cdot c^2}{W(t)}, \quad (2)$$

где

$$W(t) = c \cdot \sqrt{m^2 c^2 + p^2(t)} \quad (3)$$

– энергия частицы в момент  $t$ .

Координаты получаются интегрированием скоростей по времени. В результате интегрирования получаем для произвольного момента времени  $t$ :

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{F} [W(t) - W(0)],$$

$$y(t) - y(0) = \frac{p_y(0) \cdot c}{F} \ln \frac{W(t) + c \cdot p_x(t)}{W(0) + c \cdot p_x(0)}, \quad (4)$$

$$z(t) - z(0) = \frac{p_z(0) \cdot c}{F} \ln \frac{W(t) + c \cdot p_x(t)}{W(0) + c \cdot p_x(0)}$$

В [10] этот результат получен более громоздким методом.

*Формулы, удобные для вычислений.* Выражения (1) – (4) полностью решают задачу, но для численного счета они не слишком удобны. Дело в том, что в случае малых скоростей (импульсов) вычисление координат (4) будет приводить к ошибкам из-за ошибок округления. Поэтому (4) лучше тождественно преобразовать с тем, чтобы выделить главные члены по импульсу. Для этого в (4а) сделаем тождественное преобразование

$$W(t) - W(0) \rightarrow \frac{(W(t) - W(0)) \cdot (W(t) + W(0))}{W(t) + W(0)} = \frac{W^2(t) - W^2(0)}{W(t) + W(0)},$$

выразим квадраты энергий через импульсы и приведем подобные члены. Выражение под логарифмом в (4б) преобразуем с помощью цепочки

$$\begin{aligned} \frac{W(t) + c \cdot p_x(t)}{W(0) + c \cdot p_x(0)} &= \frac{W(t) - W(0) + W(0) + c \cdot p_x(t) - c \cdot p_x(0) + c \cdot p_x(0)}{W(0) + c \cdot p_x(0)} = \\ &= 1 + \frac{W(t) - W(0) + c \cdot F \cdot t}{W(0) + c \cdot p_x(0)} \end{aligned}$$

и выразим  $W(t) - W(0)$  через  $x(t) - x(0)$  по формуле (4а).

В результате для координат получим пригодные для счета выражения:

$$x(t) - x(0) = \frac{c^2 (p_x(t) - p_x(0)) \cdot (p_x(t) + p_x(0))}{F (W(t) + W(0))},$$

$$y(t) - y(0) = \frac{p_y(0) \cdot c}{F} \ln \left[ 1 + \frac{F \cdot (x(t) - x(0)) + c \cdot F \cdot t}{W(0) + c \cdot p_x(0)} \right], \quad (5)$$

$$z(t) - z(0) = \frac{p_{zy}(0) \cdot c}{F} \ln \left[ 1 + \frac{F \cdot (x(t) - x(0)) + c \cdot F \cdot t}{W(0) + c \cdot p_x(0)} \right].$$

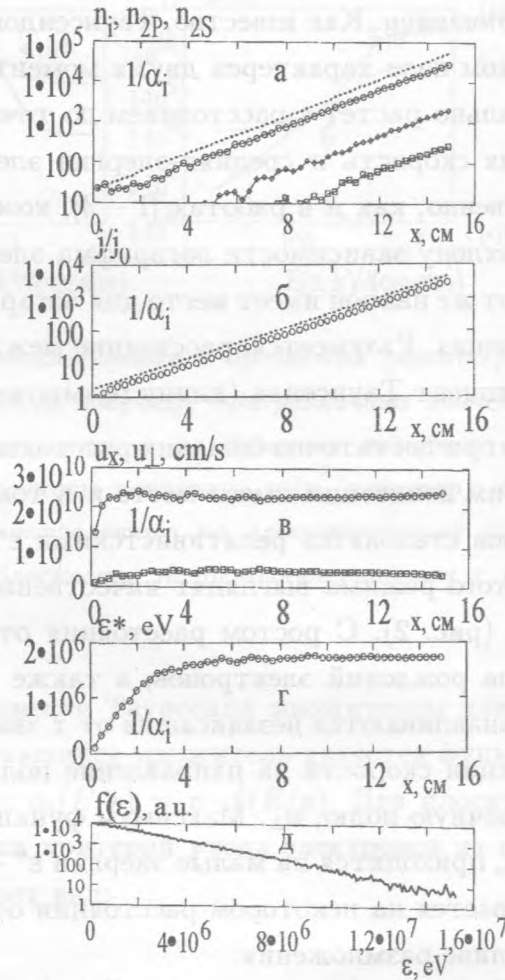


Рис. 2. Характеристики размножения электронов в Таунсендовском режиме в зависимости от расстояния до катода  $x$  при следующих параметрах:  $N = 3.2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  ( $p = 100 \text{ Торр}$ ),  $U = 15 \text{ МВ}$ ,  $d = 15 \text{ см}$ ,  $E = 1 \text{ МВ/см}$ , ( $E/p = 7.7 \text{ МВ/см} \cdot \text{атм}$ ). а) Количество рожденных ионов  $n_i$  (кружки) и атомов, возбужденных в состоянии  $2^1P$  ( $n_{2P}$ , ромбы), и в состоянии  $2^1S$  ( $n_{2S}$ , квадраты), пунктир – зависимость  $20 \cdot \exp(0.53x/cm)$ . Соответственно  $\alpha_i = 0.53 \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha_i d \approx 8$ ; б) Отношение потока электронов в данной точке  $j(x)$  к потоку электронов с катода  $j_0$ . Пунктир – зависимость  $1.7 \cdot \exp(0.53x/cm)$ ; в) Проекция  $u_x$  скорости электронов на ось  $x$ , направленную по электрическому полю (кружки), и модуль скорости  $u_{\perp}$  в плоскости, перпендикулярной оси  $x$  (квадраты); г) Средняя энергия электронов. Установившаяся средняя энергия  $\epsilon^* \approx 1.5 \text{ МэВ} \approx 3t_e c^2$  много меньше  $eU = 15 \text{ МэВ}$ ; д) Функция распределения электронов, достигших анода (произвольные единицы) по энергии (эВ).



## Результаты расчетов

*Таунсендовский режим ионизации.* Как известно, Таунсендовский режим ионизации газа во внешнем электрическом поле характерен двумя моментами. Во-первых, число актов ионизации экспоненциально растет с расстоянием до точки, где родился первый электрон. Во-вторых, средняя скорость и средняя энергия электронов не зависят от этого расстояния. Соответственно, как и в работах [1 – 3], коэффициент размножения Таунсенда определялся по наклону зависимости логарифма электронного тока от расстояния до катода (рис. 2). Тот же наклон имеет место для логарифма числа актов ионизации, прилипания и возбуждения. Разумеется, расстояние между электродами должно превышать обратный коэффициент Таунсенда (длину размножения  $\alpha_i^{-1}$ ).

Расчеты показывают, что при достаточно больших расстояниях между электродами  $d > \alpha_i^{-1}$  таунсендовский режим ионизации имеет место и в том случае, когда средняя скорость и энергия электронов становятся релятивистскими  $\epsilon^* \sim m_e c^2 \approx 0.5 \cdot 10^6$  эВ. Основные характеристики этого режима выглядят качественно так же, как в случае нерелятивистских скоростей (рис. 2). С ростом расстояния от катода  $x$  имеет место экспоненциальный рост числа рождений электронов, а также числа актов неупругих столкновений. При этом устанавливаются независимые от  $x$  значения: средней энергии электронов  $\epsilon^*$ ; средней проекции скорости на направление поля  $u_x$ ; средней проекции скорости на плоскость, поперечную полю,  $u_{\perp}$ . Максимум функции распределения электронов, долетевших до анода, приходится на малые энергии  $\epsilon^* \ll eU$ . Таунсендовский режим ионизации устанавливается на некотором расстоянии от катода  $x \sim \alpha_i^{-1}$ , соответствующем характерной длине размножения.

Как и следовало ожидать, зависимость коэффициента Таунсенда  $\alpha_i$  от  $E/p$  (рис. 3) после прохождения максимума при  $E/p \approx 200$  кВ/(атм · см) (выявленного в работе [1]) резко падает, но затем, ввиду ограничения средней скорости, выходит на постоянное значение. Это происходит при  $E/p \approx 5$  МВ/(атм · см), когда  $\epsilon^* \approx 0.5$  МэВ,  $u_x \approx 2.3 \cdot 10^{10}$  см/с  $\sim c$ .

*Кривая ухода.* В работах [1 – 3] в отличие от обычно принятого подхода [4 – 6], предложено считать, что убегающие электроны начинают преобладать в том случае, когда расстояние между электродами  $d$  становится сравнимым с характерной длиной размножения, т.е. обратным коэффициентом Таунсенда  $\alpha_i^{-1}$ . При  $\alpha_i d < 1$  убегающие электроны преобладают и в спектре электронов, долетевших до анода. Соответственно, критерий, определяющий граничное значение напряженности поля  $E_{cr}$  имеет вид:  $\alpha_i(E_{cr}, p)d = 1$ .

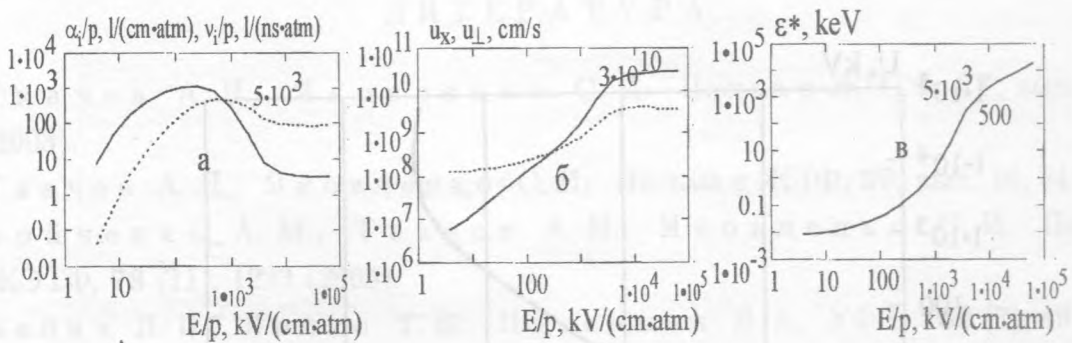


Рис. 3. Зависимость ионизационных и дрейфовых характеристик от приведенной напряженности поля  $E/p$ . Точки получены при различных значениях напряженности поля при  $p = 100$  Торр. а) Нормированные на давление значения коэффициента Таунсенда  $\alpha_i/p$  (сплошная кривая) и частоты ионизации  $\nu_i/p$  (пунктир); б) Средняя проекция скорости электронов на ось  $x$ , направленную по электрическому полю  $u_x$  (сплошная), и средний модуль скорости  $u_{\perp}$  в плоскости, перпендикулярной оси  $x$  (пунктир); в) Средняя энергия электронов.

Выделим в коэффициенте Таунсенда множителем давление или плотность газа, и используем то, что оставшийся множитель является функцией только приведенной напряженности поля  $E/p$ :  $\alpha_i(E, p) = p \cdot \xi(E/p)$ . Для плоских электродов  $E = U/d$ , при этом  $E_{cr} = U_{cr}/d$ . Тогда критерий ухода электронов из промежутка между плоскими электродами приобретает вид:

$$pd \cdot \xi(E_{cr}/p) = 1 \text{ или } pd \cdot \xi(U_{cr}/pd) = 1. \quad (6)$$

Последняя формула (6) дает неявную зависимость критического напряжения  $U_{cr}(pd)$  от произведения расстояния между электродами на давление  $pd$  (рис. 4). Кривая ухода электронов  $U_{cr}(pd)$  разделяет область эффективного размножения электронов и область, в которой электроны покидают разрядный промежуток, не успев размножиться. Она является универсальной для данного газа.

На кривой ухода электронов  $U_{cr}(pd)$  можно выделить три ветви (рис. 4). Две нижние ветви аналогичны ветвям кривой ухода, полученным при нерелятивистском рассмотрении [1]. Появление на верхней ветви нерелятивистской кривой ухода точки поворота при  $pd \sim 0.3 \text{ атм} \cdot \text{см}$  и, соответственно, дополнительной по сравнению с нерелятивистским случаем третьей ветви, связано с возрастанием сечения ионизации при больших энергиях из-за релятивистских эффектов. Отметим, что при  $pd > 0.3 \text{ атм} \cdot \text{см}$ , в отличие от

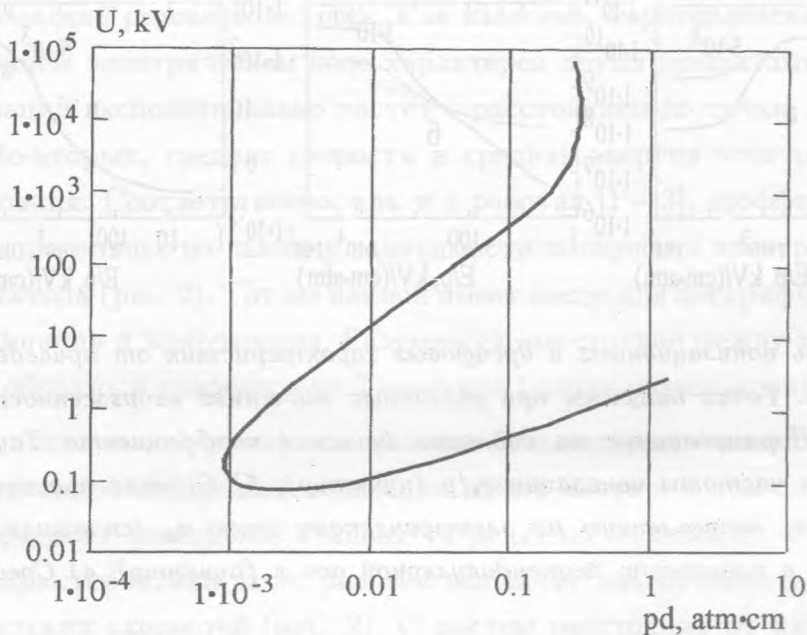


Рис. 4. Универсальная кривая  $U_{cr}(pd)$ , разграничивающие области ухода и размножения электронов. Интенсивное размножение соответствует внутренней области, уход без существенного размножения – внешней области.

нерелятивистского случая, размножение электронов происходит при любых значениях напряжения на разрядном промежутке, превышающих пороговое значение, определяемое нижней ветвью кривой ухода.

Итак, в данной работе рассмотрен режим размножения электронов при больших напряженностях поля, когда электрон на длине размножения может набрать релятивистскую кинетическую энергию. Показано, что даже в таких сверхсильных полях Таунсендовский механизм размножения электронов справедлив, если расстояние между электродами достаточно велико.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Письма в ЖЭТФ, **77**, вып. 5, 264 (2003).
- [2] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **29**, вып. 16, 54 (2003).
- [3] Бойченко А. М., Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Письма в ЖЭТФ, **78** (11), 1223 (2003).
- [4] Бабич Л. П., Лойко Т. В., Цукерман В. А. УФН, **160** (7), 49 (1990).
- [5] Королев Ю. Д., Месяц Г. А. Физика импульсного пробоя газов. М., Наука, 1991.
- [6] Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М., Наука, 1992.
- [7] Тарасенко В. Ф., Яковленко С. И., Орловский В. М., Ткачев А. Н., Шунайлов С. А. Письма в ЖЭТФ, **77**, вып. 11, 737 (2003).
- [8] Tkachev A. N., Yakovlenko S. I. Laser physics, **12**(7), 1022 (2002).
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1988.
- [10] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М., ГИФМЛ, 1962.

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 25 декабря 2003 г.