МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 53.03

РАВНОВЕСИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ В ИГРЕ ИЗИНГА

А. В. Леонидов[1,2]

Предложено описание статических равновесий в игре с зашумленным бинарным выбором (игре Изинга) на полном и случайном графах в терминах максимизации функции правдоподобия конфигураций системы. Установлена эквивалентность таких равновесий правдоподобия и конкурентных равновесий дискретного отклика Байеса–Нэша для специального случая самосогласованных ожиданий агентов. Показано, что те же равновесия ожидания можно получить с использованием формализма статистической суммы.

Ключевые слова: игра Изинга, равновесие правдоподобия, зашумленный дискретный выбор, статистическая сумма.

1. Введение. Одной из ключевых задач при разработке количественного описания мультиагентных систем является максимально возможное использование идей и результатов теории игр [1–3]. Особенно важную роль играет исследование различных интерпретаций теоретико-игровых равновесий как естественных состояний мультиагентных систем.

Описание статических теоретико-игровых равновесий носит во многих случаях вероятностный характер. На фундаментальном уровне вероятности дают наиболее естественную трактовку равновесий в смешанных стратегиях, см., напр., [4]. Возможно также и непосредственное появление вероятностей как средства описания рассматриваемой игры. Таков в частности случай игр, в которых полезности агентов содержат случайные компоненты. В непосредственной связи с рассмотрением в настоящей статье находится формулировка игр с зашумленным дискретным выбором [5] и разновидность равновесия Нэша в таких задачах, равновесие дискретного отклика (РДО) [6, 7]. Количественное описание РДО базируется на описании выбора агентов как зависящего от

[1] ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: .

[2] МФТИ, 141700 Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

их ожиданий по отношению к выбору агентов-соседей. РДО может таким образом также быть описано как равновесие ожиданий. Статические равновесия РДО/ожиданий в играх с зашумленным дискретным выбором изучались в [8–12] и, в более общем случае мультиномиального выбора, в [13, 14].

Рассмотрение полностью гетерогенной игры, в которой необходимо учесть различающиеся индивидуальные характеристики каждого агента, хотя и является формально возможным, не позволяет построить ее интерпретируемое решение. Выход состоит в том, чтобы рассматривать гетерогенность свойств игроков в терминах небольшого набора характеристик. К примеру, в графических играх обычно различают агентов по степени вершины, в которой они находятся, см., напр., [17]. Ключевой величиной, характеризующей возникающее вырождение, является энтропия и, в самом деле, она в явной форме возникает при построении описания динамической эволюции игры Изинга к своим равновесиям, которые оказываются равновесиями РДО/ожиданий [9, 11]. В то же самое время имеющиеся описания статических равновесий РДО/ожиданий базируются на использовании индивидуально формируемых ожиданий так, что вышеупомянутое вырождение проявляется только в предположении об их эквивалентности. В вероятностных терминах это означает, что только в рассмотрении участвуют только средние по выбору соседей в соответствующих маржинальных распределениях.

Чтобы построить коллективное описание теоретико-игровых равновесий при наличии случайных факторов требуется рассмотрение полного мультивариантного распределения по конфигурациям стратегий, построение его редуцированной версии, отвечающей специфике рассматриваемой задачи и определение в его терминах теоретико-игрового равновесия. Наиболее естественными кандидатами для равновесных конфигураций являются такие, которые максимизируют функцию правдоподобия (т. е. вышеописанное распределение). В этой работе мы продолжаем анализ работы [11] путем явного конструирования статических равновесий правдоподобия для игры Изинга на полном и случайном графах для произвольного шума и демонстрируем их эквивалентность равновесиям, полученным с использованием метода статистической суммы. Нами будет также установлена эквивалентность этих равновесий равновесиям РДО/ожиданий для специального случая самосогласованных ожиданий.

2. Равновесия правдоподобия.

2.1. Равновесия правдоподобия в игре Изинга: общие формулы.

Рассматриваемая в настоящей статье игра Изинга – это игра с зашумленным бинарным выбором, где N агентов снабжены двумя чистыми стратегиями $\{s_i = \pm 1\}$, $i =$

$1,\ldots,N$ и помещаются в узлах неориентированного графа. Общее описание таких систем дается вероятностным распределением (функцией правдоподобия) $\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\Theta)$, где Θ обозначает набор параметров как общих, так и индивидуальных, характеризующих рассматриваемую версию процесса принятия решений. Естественно определить *равновесие правдоподобия* $(s_1^{\mathrm{eq}},\ldots,s_N^{\mathrm{eq}})$ рассматриваемой игры как конфигурацию с максимальной вероятностью реализации, т. е.

$$(s_1^{\mathrm{eq}},\ldots,s_N^{\mathrm{eq}}) = \arg\max_{s_1,\ldots,s_N} \mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\Theta). \tag{1}$$

Анализ статических равновесий в играх с зашумленным дискретным откликом на графах основан на использовании ожидаемых полезностей $\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right]$, отражающих ценность выбора s_i и зависящих от ожиданий агента относительно выбора соседей по графу. В игре Изинга для агента i ожидаемая полезность от выбора s_i предполагается имеющей вид [8, 9, 11]

$$\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right] = \left(H + J\sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right) s_i + \epsilon_{s_i}, \tag{2}$$

где $\{a_{ij}\}$ – матричные элементы матрицы смежности a, где $a_{ij}=1$ при наличии ребра $j\leftrightarrow i$ и $a_{ij}=0$ при его отсутствии, $\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]$ обозначает математическое ожидание для выбора s_j, сформировавшееся у агента i, $J>0$ – константа, характеризующая взаимное влияние агентов и ϵ_{s_i} – идиосинкратические зависящие от стратегии случайные аддитивные вклады в полезность с функцией распределения $f(\epsilon_{s_i}|\beta)$, предполагающейся одинаковой для всех агентов. Параметр β характеризует интенсивность шума. Таким образом, в рассматриваемой задаче набор параметров Θ имеет вид

$$\Theta = \left(J,\beta,H,\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}\right). \tag{3}$$

Из уравнения (2) следует, что вероятность выбора стратегии s_i агентом i равна

$$\begin{aligned} p(s_i|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}) &= \mathrm{Prob}\left[\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right] > \mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(-s_i)\right]\right] = \\ &= F\left(2\beta\left[H + J\sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right] s_i\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$F(x) = \mathrm{Prob}\left[\epsilon_{-s_i} - \epsilon_{s_i} < x\right]. \tag{5}$$

В дальнейшем будет использована удобная параметризация $F(x)$ вида

$$F(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}g(x)}}{2\cosh\left[\frac{1}{2}g(x)\right]}, \tag{6}$$

где для симметричных распределений $f(\epsilon_{s_i}|\beta)$ функция $g(x)$ является нечетной функцией своего аргумента. В терминах параметризации (6) уравнения (4) имеет вид

$$\begin{aligned} & p(s_i|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}) = \\ & = \frac{\exp\left[s_i\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right]\right)\right]}{2\cosh\left[\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right]\right)\right]}, \end{aligned} \tag{7}$$

где мы также учли, что $(s_i)^k = s_i$ для нечетных k и $(s_i)^k = 1$ для четных. В специальном случае гумбелевского шума

$$f(\epsilon_{s_i}|\beta) = \beta e^{-\beta\epsilon_{s_i} + e^{-\beta\epsilon_{s_i}}} \tag{8}$$

имеем $g(x) = x$, так что

$$p(s_i|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}) = \frac{\exp\left[s_i\left(\beta H + \beta J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right)\right]}{2\cosh\left[\beta H + \beta J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right]}. \tag{9}$$

Для заданного набора ожиданий $\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}$ для всех $i = 1,\ldots,N$ уравнение (7) полностью описывает равновесный набор вероятностей $\{p(s_i|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\})\}$, определяющий соответствующее конкурентное равновесие Байеса–Нэша в смешанных стратегиях. Дальнейшие упрощения возможны за счет предположений относительно структуры набора ожиданий. В частности, равновесие дискретного отклика [6, 7] определяется выполнением условий согласования ожиданий вида

$$\mathbb{E}_{(i)}\left[s_i\right] = \mathbb{E}_{(j)}\left[s_i\right] \quad \forall i, j. \tag{10}$$

В рассматриваемой конкурентной игре агенты формируют свои ожидания независимо, так что из уравнения (7) следует, что функция правдоподобия $\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\})$[3] конфигурации $(s_1,\ldots,s_N)$ для заданного набора ожиданий $\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}) = \prod_{i=1}^{N} p(s_i|\{\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\}) = \\ & = \prod_{i=1}^{N}\frac{\exp\left[s_i\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right]\right)\right]}{2\cosh\left[\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + J\sum_{j\neq i}a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]\right]\right)\right]}. \end{aligned} \tag{11}$$

[3]Здесь и ниже мы опускаем явное перечисление параметров J, β, H в формулах для функции правдоподобия.

Для гумбелевского шума

$$\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{\mathbb{E}_{(i)}[s_j]\}) = \\ = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp\left[s_i\left(\beta H + \beta J \sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}[s_j]\right)\right]}{2\cosh\left[\beta H + \beta J \sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}[s_j]\right]}. \tag{12}$$

Равновесие правдоподобия $(s_1^{\mathrm{eq}},\ldots,s_N^{\mathrm{eq}})$ рассматриваемой игры определяется, таким образом, уравнением

$$(s_1^{\mathrm{eq}},\ldots,s_N^{\mathrm{eq}}) = \underset{s_1,\ldots,s_N}{\arg\max}\, \mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{\mathbb{E}_{(i)}[s_j]\}), \tag{13}$$

где функция $\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{\mathbb{E}_{(i)}[s_j]\})$ определена уравнением (11).

В дальнейшем мы рассмотрим свойства равновесий правдоподобия для специальных случаев полного и случайного графов, где случайные графы рассматриваются в рамках конфигурационной модели.

2.2. Равновесия правдоподобия: полный граф.

Для полного графа

$$\sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}[s_j] \quad \to \quad \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}_{(i)}[s_j]. \tag{14}$$

Естественно предположить, что ожидания агента i по отношению к выбору его $N-1$ соседей эквивалентны, т. е.

$$\mathbb{E}_{(i)}[s_j] = m_{(i)}^{(e)} \quad \forall j, \tag{15}$$

так что в пределе больших N

$$\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}_{(i)}[s_j] = m_{(i)}^{(e)}. \tag{16}$$

Функция правдоподобия зависит таким образом от набора ожиданий $\{m_{(i)}^{(e)}\}$,

$$\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|\{m_{(i)}^{(e)}\}) = \\ = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp\left[s_i\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + Jm_{(i)}^{(e)}\right]\right)\right]}{2\cosh\left[\frac{1}{2}g\left(2\beta\left[H + Jm_{(i)}^{(e)}\right]\right)\right]}. \tag{17}$$

В рассматриваемом случае топологии полного графа нет оснований предполагать, что ожидания агентов относительно соседей могут существенно отличаться. Естественно поэтому предположить, что их ожидания $m_{(i)}^{(e)}$ имеют узкое распределение вокруг некоторого среднего значения $m^{(e)}$[4]:

$$m_{(i)}^{(e)} = m^{(e)} + \delta m_{(i)}^{(e)}. \tag{18}$$

Из структуры уравнения (17) ясно, что в пределе больших N вклад идиосинкратических отклонений $\{\delta m_{(i)}^{(e)}\}$ подавлен, так что выражение для функции правдоподобия (17) принимает вид

$$\mathcal{P}(s_1, \ldots, s_N | m^{(e)}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp\left[s_i \frac{1}{2} g\left(2\beta\left[H + Jm^{(e)}\right]\right)\right]}{2\cosh\left[\frac{1}{2} g\left(2\beta\left[H + Jm^{(e)}\right]\right)\right]} =$$
$$= \frac{\exp\left[Nm\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]\right)^N}, \tag{19}$$

где мы определили усредненную стратегию m как

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i. \tag{20}$$

Поскольку $\mathcal{P}(s_1, \ldots, s_N | m^{(e)})$ зависит от $(s_1, \ldots, s_N)$ только через m, выражение для вероятностного распределения (19) может быть записано в виде

$$\mathcal{P}(s_1, \ldots, s_N | m^{(e)}) \to \mathcal{P}(m | m^{(e)}) = \tag{21}$$
$$= \mathcal{N}(m)\frac{\exp\left[Nm\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]\right)^N} =$$
$$= \frac{\exp\left[N\left(m\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}]) + \mathcal{H}(m)\right)\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]\right)^N},$$

где $\mathcal{N}(m)$ – число конфигураций $(s_1, \ldots, s_N)$ таких, что $(\sum_i s_i)/N = m$, а $\mathcal{H}(m) = \ln \mathcal{N}(m)$ – это энтропия Бернулли

$$\mathcal{H}(m) = -\frac{1-m}{2}\ln\left(\frac{1-m}{2}\right) - \frac{1+m}{2}\ln\left(\frac{1+m}{2}\right). \tag{22}$$

Имеем следовательно

$$\mathcal{P}(m | m^{(e)}) = \exp\left\{N\left[m\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}]) + \mathcal{H}(m) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]\right)\right]\right\}. \tag{23}$$

[4]Заметим, что предположение об эквивалентности ожиданий эквивалентных агентов, т. е. о том, что $m_{(i)}^{(e)} = m^{(e)}$, является стандартным в литературе о графических играх.

Равновесия правдоподобия m^{eq} определяются уравнением

$$m^{\text{eq}} = \arg\max_m \mathcal{P}(m|m^{(e)}). \tag{24}$$

Выпишем выражение для соответствующей функции логарифмического правдоподобия $\mathcal{V}(m|m^{(e)})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(m|m^{(e)}) = N\left[m\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}]) + \mathcal{H}(m)\right] \equiv \\ \equiv N v(m|m^{(e)}).\end{aligned} \tag{25}$$

Имеем

$$\frac{dv(m|m^{(e)})}{dm} = \frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)]}) - \operatorname{atanh}(m). \tag{26}$$

Следовательно, равновесия правдоподобия m^{eq} удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{atanh}(m^{\text{eq}}) = \frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}]) \tag{27}$$

или, эквивалентным образом,

$$m^{\text{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{(e)}])\right]. \tag{28}$$

Заметим, что

$$\left.\frac{d^2v(m|m^{(e)})}{dm^2}\right|_{m=m^{\text{eq}}} = -\frac{1}{1-(m^{\text{eq}})^2} < 0, \tag{29}$$

так что все найденные значения m^{eq} отвечают максимумам функции логарифмического правдоподобия $v(m|m^{(e)})$.

Легко проверить, что распределение $\mathcal{P}(m|m^{(e)})$, определенное в (21), корректно нормировано, и что

$$\mathbb{E}_m[m] = \tanh\left[\frac{1}{2}g\left(2\beta[H + Jm^{(e)}]\right)\right]. \tag{30}$$

Из уравнений (28), (32) мы видим, что в рассматриваемом случае

$$m^{\text{eq}} = \mathbb{E}_m[m]. \tag{31}$$

Дополнительное предположение о согласованности ожиданий $m^{\text{eq}} = \mathbb{E}_m[m] = m^{(e)}$, определяющее равновесие ожиданий/РДО, приводит к уравнению на m^{eq} вида

$$m^{\text{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H + Jm^{\text{eq}}])\right], \tag{32}$$

воспроизводящее известный результат из литературы [8, 9].

Полученные результаты могут также быть получены с использованием, по аналогии со статистической физикой, понятия статистической суммы системы. Статистическая сумма определяется как сумма по конфигурациям ненормированных вероятностей. В рассматриваемом случае получаем, используя (21),

$$\mathcal{P}(m|m^{(e)}) \sim e^{N\left(m\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jm^{(e)}])+\mathcal{H}(m)\right)} \equiv e^{Nv(m|m^{(e)})}, \tag{33}$$

где функция $v(m|m^{(e)})$ была определена в (25). Таким образом, выражение для статистической суммы $\mathcal{Z}$ принимает вид

$$\mathcal{Z} = \sum_{m=-1}^{1} e^{Nv(m|m^{(e)})}. \tag{34}$$

В подходе, использующем статистическую сумму, равновесные состояния m^{eq} – это состояния, дающие доминирующий вклад в $\mathcal{Z}$. В пределе $N \to \infty$ таковыми являются состояния, удовлетворяющие уравнению

$$m^{\text{eq}} = \arg\max_{m} v(m|m^{(e)}), \tag{35}$$

т. е. в точности те же равновесия, которые описываются уравнением (28).

2.3. Равновесия правдоподобия: случайные графы.

Изучим теперь равновесия правдоподобия в игре Изинга на неориентированных случайных графах, рассматриваемых в рамках конфигурационной модели, см., напр., [16]. В этой модели граф с заданным распределением по степеням $\{\pi_k\}$ строится путем случайного проведения ребер между вершинами, так что для вершин i и j со степенями k_i и k_j вероятность проведения ребра равна

$$\text{Prob}(a_{ij} = 1) = \mathbb{E}[a_{ij}] = \frac{k_i k_j}{\mathbb{E}_\pi[k]}. \tag{36}$$

Мы будем рассматривать задачу в замороженном приближении, в котором можно осуществить следующую замену в (7)

$$\begin{aligned} \sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right] \quad \to \quad & \sum_{j\neq i} \mathbb{E}[a_{ij}]\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right] = \\ & = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\frac{k_i k_j}{\mathbb{E}_\pi[k]}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

Единственным источником гетерогенности в рассматриваемой модели является распределение по степеням узлов. В общем случае выбор агента i определяется его ожиданиями относительно выбора агентов-соседей $\mathbb{E}_{(i)}[s_j]$. В изучаемой модели предполагается, следуя стандартному подходу [17], что математическое ожидание $\mathbb{E}_{(i)}[s_j]$ зависит только от степени k вершины j. Ниже мы будем использовать обозначения

$$\mathbb{E}_{(i)}[s_j] = m_k^{(e)} \quad \forall i, \ \ k_j = k. \tag{38}$$

Вероятность $p_i^{(k)}$ выбора стратегии $s_i^{(k)}$ агентом i, расположенным в вершине степени k, одинакова для всех таких вершин. Используя (37), (38), аргумент в (7) может быть переписан [11] в следующем виде:

$$H + J\sum_{j\neq i} a_{ij}\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right] = [H + Jkm_w^{(e)}], \tag{39}$$

где

$$m_w^{(e)} = \sum_k \frac{k\pi_k}{\mathbb{E}_\pi[k]} m_k^{(e)}. \tag{40}$$

Таким образом, явное выражение для вероятности имеет вид [11]

$$p_i^{(k)}(s_i^{(k)}|m_w^{(e)}) = \frac{e^{\frac{1}{2}s_i^{(k)}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])}}{2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]}. \tag{41}$$

Используя выражение (41), получаем следующее выражение для функции распределения системы (11):

$$\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|m_w^{(e)}) = \tag{42}$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp\left[N_k m_k \frac{1}{2} g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]\right)^{N_k}},$$

где N_k – число вершин со степенью k и

$$m_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i\in\Xi_k} s_i^{(k)}. \tag{43}$$

Удобно переписать выражение для функции распределения в терминах переменных $\{m_k\}$:

$$\mathcal{P}(s_1,\ldots,s_N|m_w^{(e)}) = \prod_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}(m_k|m_w^{(e)}), \tag{44}$$

где, в пределе больших $\{\mathcal{N}_k\}$

$$\mathcal{P}(m_k|m^{(e)}) = \mathcal{N}(m_k)\frac{\exp\left[N_k m_k \frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]\right)^{N_k}} =$$
$$= \frac{\exp\left[N_k\left(m_k\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}]) + \mathcal{H}(m_k)\right)\right]}{\left(2\cosh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]\right)^{N_k}}. \tag{45}$$

Максимизация (45) по m_k приводит к уравнениям, определяющим равновесные значения m_k^{eq}, описывающие равновесия правдоподобия. Получаем

$$\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}]) = \operatorname{atanh}(m_k^{\mathrm{eq}}) \tag{46}$$

или, эквивалентным образом,

$$m_k^{\mathrm{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]. \tag{47}$$

Из (47) получаем следующее уравнение на m_w^{eq}:

$$m_w^{\mathrm{eq}} = \sum_k \frac{k\pi_k}{\mathbb{E}_\pi[k]} m_k = \tag{48}$$
$$= \sum_k \frac{k\pi_k}{\mathbb{E}_\pi[k]} \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{(e)}])\right]. \tag{49}$$

В специальном случае РДО $m_k^{(e)} = m_k^{\mathrm{eq}}$, так что

$$m_k^{\mathrm{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w^{\mathrm{eq}}])\right], \tag{50}$$
$$m_w^{\mathrm{eq}} = \sum_k \frac{k\pi_k}{\mathbb{E}_\pi[k]} \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta[H+Jkm_w])\right].$$

Уравнения (47), (48), (50), (51) совпадают с полученными в [11, 12] при рассмотрении конкурентного РДО равновесия Байеса–Нэша на случайных графах.

3. Выводы.

Суммируем еще раз результаты, полученные в статье:

- Предложено описание равновесий правдоподобия в игре Изинга на полном графе. Установлена их эквивалентность равновесиям дискретного отклика для специального случая самосогласованных ожиданий [11, 12].

- Представлено описание равновесий правдоподобия для игры Изинга на случайных графах в замороженном приближении конфигурационной модели. Установлена их эквивалентность ранее изученным равновесиям дискретного отклика для специального случая самосогласованных ожиданий [11, 12].

- Установлена эквивалентность равновесий, найденных в подходе, основанном на использовании статистической суммы системы, равновесиям правдоподобия в игре Изинга на полном графе.

Работа поддержана грантом для исследовательских центров в области искусственного интеллекта, выданным аналитическим центром при Правительстве Российской Федерации в соответствии с соглашением о субсидии (идентификатор соглашения 000000D730324P540002) и договором с Московским физико-техническим институтом от 1 ноября 2021 года № 70-2021-00138.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Y. Shoham, K. Leyton-Brown, *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations* (New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008).

[2] Y. Lu, K. Yan, "Algorithms in multi-agent systems: a holistic perspective from reinforcement learning and game theory,"arXiv preprint arXiv:2001.06487, Jan. 31, 2020.

[3] N. Vlassis, *A concise introduction to multiagent systems and distributed artificial intelligence* (Springer Nature Switzerland, 2022).

[4] D. Fudenberg, J. Tirole, *Game theory* (New Dehli, India: Ane Books Pvt. Ltd, 2015).

[5] S. P. Anderson, A. De Palma, J.-F. Thisse, *Discrete choice theory of product differentiation* (Cambridge, MA, USA: MIT press, 1992).

[6] J. K. Goeree, C. A. Holt, T. R. Palfrey, *Quantal response equilibria* (Princeton. NJ, USA: Princeton University Press, 2016).

[7] R. D. McKelvey, T. R. Palfrey, Games and economic behavior **10**, 6 (1995). https://doi.org/10.1006/game.1995.1023.

[8] W. A. Brock, S. N. Durlauf, The Review of Economic Studies **68**, 235 (2001). https://doi.org/10.1111/1467-937X.00168.

[9] L. Blume, S. Durlauf, International Game Theory Review **5**, 193 (2003). https://doi.org/10.1142/S021919890300101X.

[10] S. N. Durlauf, Y. M. Ioannides, Annu. Rev. Econ. **2**, 451 (2010). https://doi.org/10.1146/annurev.economics.050708.143312.

[11] A. Leonidov, A. Savvateev, A. Semenov, Chaos, Solitons & Fractals **180**, 114540 (2024). https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114540.

[12] A. Leonidov, A. Savvateev, A. Semenov, CEUR Workshop Proceedings MACSPro'2020, 2020.

[13] W. A. Brock, S. N. Durlauf, American Economic Review **92**, 298 (2002). DOI: 10.1257/000282802320189438.

[14] A. Leonidov, Computational Management Science **9**, 9 (2024). https://doi.org/10.1007/s10287-023-00490-y.

[15] A. Leonidov, A. Savvateev, A. Semenov, "Quantal response equilibria in binary choice games on graphs", arXiv preprint arXiv:1912.09584, Dec. 2019.

[16] M. Newman, *Networks* (Oxford, UK: Oxford University Press, 2018). – Pp. 369-416.

[17] S. Goyal, *Connections: an introduction to the economics of networks* (Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2012).

Поступила в редакцию 19 июля 2024 г.
После доработки 22 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 августа 2024 г.