

УДК 53.072, 519.856

## СТРУКТУРЫ СОСТОЯНИЙ ЦЕПОЧКИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ЛОВУШКАМИ

А. Ю. Лавренов<sup>1</sup>, И. А. Лубашевский,  
А. А. Кацнельсон<sup>1</sup>, М. Хаджи махмуд Заде<sup>2,1</sup>

*Численным моделированием цепочки осцилляторов с динамическими ловушками показано, что в этой системе возникают разнообразные долгоживущие состояния, которые образуют макроскопические структуры. Полученные результаты трактуются как новый тип неравновесных фазовых переходов, обусловленных аномалиями кинетических коэффициентов.*

К настоящему времени в социальных, экономических и биологических системах обнаружен широкий класс кооперативных явлений (см., например, обзор [1]). Однако их свойства еще далеки от глубокого понимания. Дело в том, что, в отличие от физических объектов, живые организмы характеризуются мотивированным поведением с ограниченной рациональностью. Это и наделяет такие системы принципиально новыми закономерностями. В настоящей работе рассматриваются фазовые переходы, обусловленные аномалиями кинетических коэффициентов, возникновение которых связывается именно с ограниченной рациональностью этих элементов. Тем не менее, фазовые переходы данного типа могут возникать и в физических системах, например, при релаксации насыщенных водородом сплавов палладия, чье поведение в значительной степени определяется динамикой неравновесных вакансий [2, 3].

Для иллюстрации сути изучаемой проблемы рассмотрим движение отдельного автомобиля в насыщенном транспортном потоке, где обгоны достаточно редки. В этом

<sup>1</sup>Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы.

<sup>2</sup>Физический факультет, Исфаханский университет, Хезар Джериб, Исфахан, Иран.

случае, грубо говоря, поведение водителя определяется расстоянием  $h$  до впереди идущего автомобиля и их относительной скоростью  $\Delta v$ . При управлении автомобилем водитель, в первую очередь, реагирует на изменение относительной скорости  $\Delta v$  как на наиболее значимый фактор в безопасности движения. Оптимизация расстояния  $h$  между автомобилями происходит на масштабах времени, значительно превышающих время реакции водителя на изменение скорости. Это обусловлено в том числе и тем, что визуальная оценка оптимальности расстояния между автомобилями является более трудной задачей, чем фиксация их относительного движения. Поэтому, когда относительная скорость становится достаточно малой,  $|\Delta v| \lesssim v_t$ , где  $v_t$  – некоторый порог восприятия водителем относительного движения, его активность падает, и коррекция движения автомобиля затормаживается. В фазовом пространстве область, где система проводит относительно длительное время из-за замедления ее динамики, называется динамической ловушкой [4, 5]. В данном случае – это слой  $|\Delta v| \lesssim v_t$  на плоскости  $\{h, \Delta v\}$ . Наличие динамических ловушек в системе многих “частиц” может приводить к неравновесным фазовым переходам с аномальными свойствами, например, к появлению континуума долгоживущих состояний. В частности, концепция динамических ловушек объясняет наблюдаемые аномалии в синхронизированном движении автомобилей в насыщенных транспортных потоках (см. обзоры [1, 6]).

Исследование неравновесных фазовых переходов, обусловленных динамическими ловушками, находится еще только на начальном этапе, что и оправдывает изучение отдельных модельных систем. В работе [7] мы проанализировали свойства осциллятора с динамической ловушкой и показали, что аддитивный шум может индуцировать в этой системе кинетический фазовый переход. В работах [8, 9] была рассмотрена цепочка подобных осцилляторов и продемонстрировано, что динамические ловушки могут вызвать неустойчивость однородного состояния. Это приводит к возникновению широкого класса аномальных функций распределения скоростей движения “частиц”  $\{v_i\}$ , параметра симметрии  $\{z_i = x_i - \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})\}$  и т.п. В частности, было получено аномальное распределение скоростей вида  $\propto \exp\{-|v|\}$ , обнаруженного для плотных потоков автомобилей на основе эмпирических данных [10]. Целью настоящей работы является демонстрация того факта, что динамические ловушки в такой цепочке осцилляторов обуславливают возникновение кооперативных состояний с “индивидуальной” жизнью.

Рассмотрим  $N$  частиц, которые соединены пружинками и могут двигаться вдоль оси  $x$ . Крайние частицы жестко закреплены. Суммарная сила, действующая на ча-

стицу  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, N - 1$ ), определяется относительным сжатием соседних пружин  $z_i = x_i - \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})$  (сила упругости) и скоростью изменения этого сжатия  $u_i = dz_i/dt$  (внутреннее вязкое трение пружин с коэффициентом  $\sigma$ ). Предполагается также наличие слабого вязкого трения  $\propto \sigma_0 v_i$  при движении частиц со скоростью  $v_i = dx_i/dt$  (коэффициент  $\sigma_0 \ll 1$ ), чтобы предотвратить достижение слишком больших скоростей, усложняющих численное моделирование.

Принимая во внимание вышесказанное, запишем уравнение движения частиц в следующем безразмерном виде:

$$\frac{dv_i}{dt} = -Q(u_i, h_i) \cdot (z_i + \sigma u_i + \sigma_0 v_i) + \epsilon \xi_i(t), \quad (1)$$

где последний член описывает независимые Ланжевеновские случайные силы амплитуды  $\epsilon$ . Эффект динамических ловушек учитывается введением множителя  $Q(u, h)$ , который зависит, главным образом, от величины  $u$ . Когда для частицы  $i$  величина  $|u_i| \ll 1$ , ее “активность в управлении скоростью движения” падает, что отвечает условию  $Q(u, h) \ll 1$ . При  $|u_i| \gtrsim 1$  частица “активно управляет своим движением” и  $Q(u, h) \approx 1$ . Зададим функцию  $Q(u, h)$  следующим выражением

$$Q(u, h) = \frac{u^2 + q^2(h)}{u^2 + 1}, \quad (2)$$

где величина  $q(h)$  характеризует интенсивность динамических ловушек. Когда  $q(h) \ll 1$ , эффект динамических ловушек значителен, в обратном случае ( $q(h) \approx 1$ ) им можно пренебречь. Зависимость  $q(h)$  учитывает тот факт, что на слишком малых расстояниях между соседями  $h_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) \sim h_0 \ll 1$  частица  $i$  “должна корректировать свое положение достаточно активно” и  $q(h) \approx 1$ . Ее введение связано с проблемой регуляризации описания достаточно плотных кластеров частиц, возникающих в результате развития неустойчивости однородного состояния системы с межчастичным расстоянием  $l \gg h_0$ . Для простоты примем следующее выражение:

$$q^2(h) = q_0^2 + (1 - q_0^2) \frac{h_0^2}{h^2 + h_0^2}, \quad (3)$$

где параметр  $0 < q_0 < 1$ . В данной модели выбраны такие масштабы времени и координат, чтобы граница области динамических ловушек отвечала значениям  $v_i = 1$ .

Частицы предполагаются взаимно непроницаемыми, что описывается упругими столкновениями, приводящими к обмену скоростей сталкивающейся пары частицы. Соударения более высокого порядка (тройные, четверные и т.д.) игнорируются.

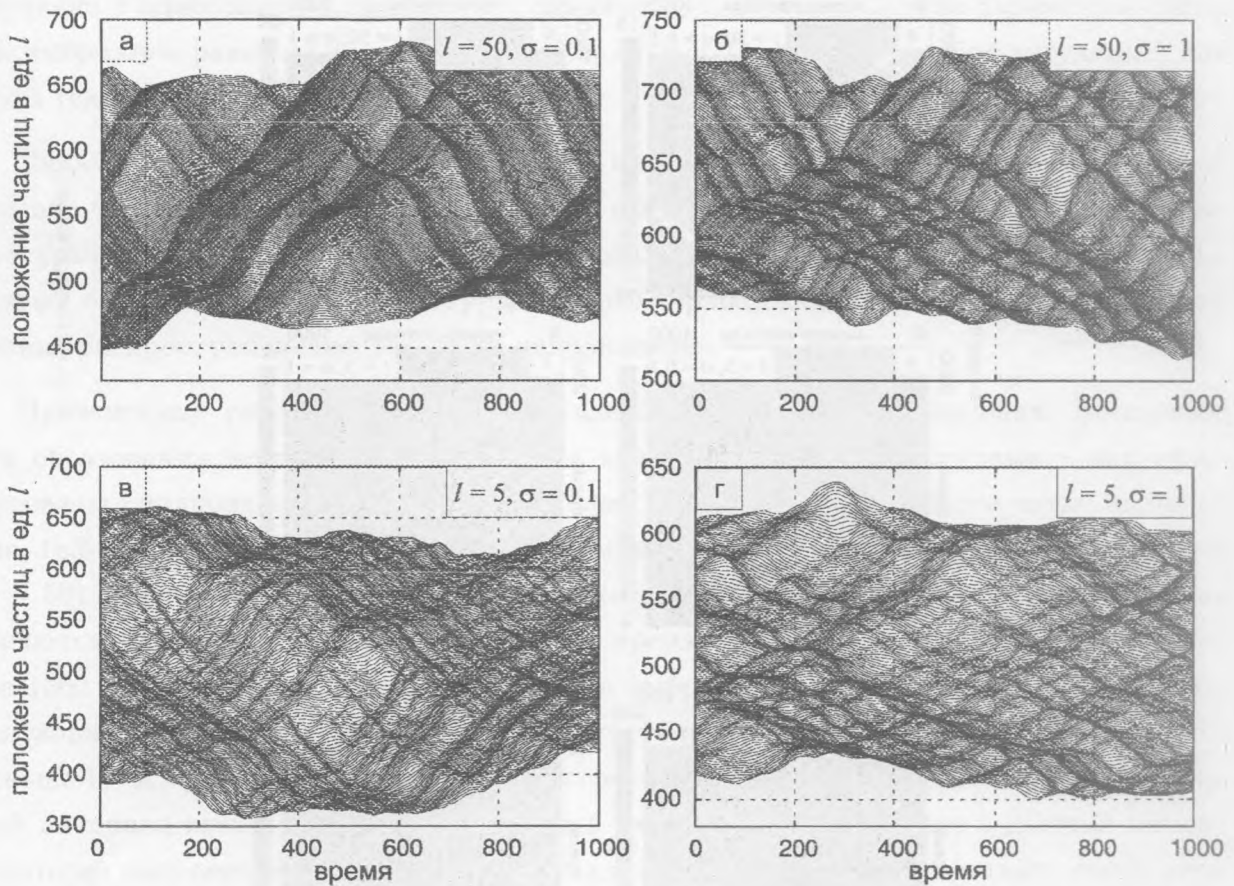


Рис. 1. Зависимость положения 200 частиц от времени. Ноль по шкале времени соответствует 4000 единицам времени численного счета.

Как показано в работе [9], однородное состояние данной системы частиц является всегда локально устойчивым. Однако возмущение конечной амплитуды может приводить к развитию неустойчивости. Далее будет продемонстрировано, что эта неустойчивость обуславливает формирование долгоживущих кооперативных состояний.

Модель была исследована численно для цепочки из 1000 частиц. Для решения системы уравнений (1) применялся стохастический метод Рунге–Кутты [11, 12]. Выбранное время элементарного шага  $\delta t = 0.02$  было проверено на устойчивость решения относительно его уменьшения или увеличения. Общее время счета  $T$  составило 8000 для того, чтобы получить устойчивое распределение исследуемых величин. В начале счета все частицы были распределены в пространстве равномерно на расстоянии  $l = 50$  (малая плотность частиц) или  $l = 5$  (большая плотность частиц), а их скорости были

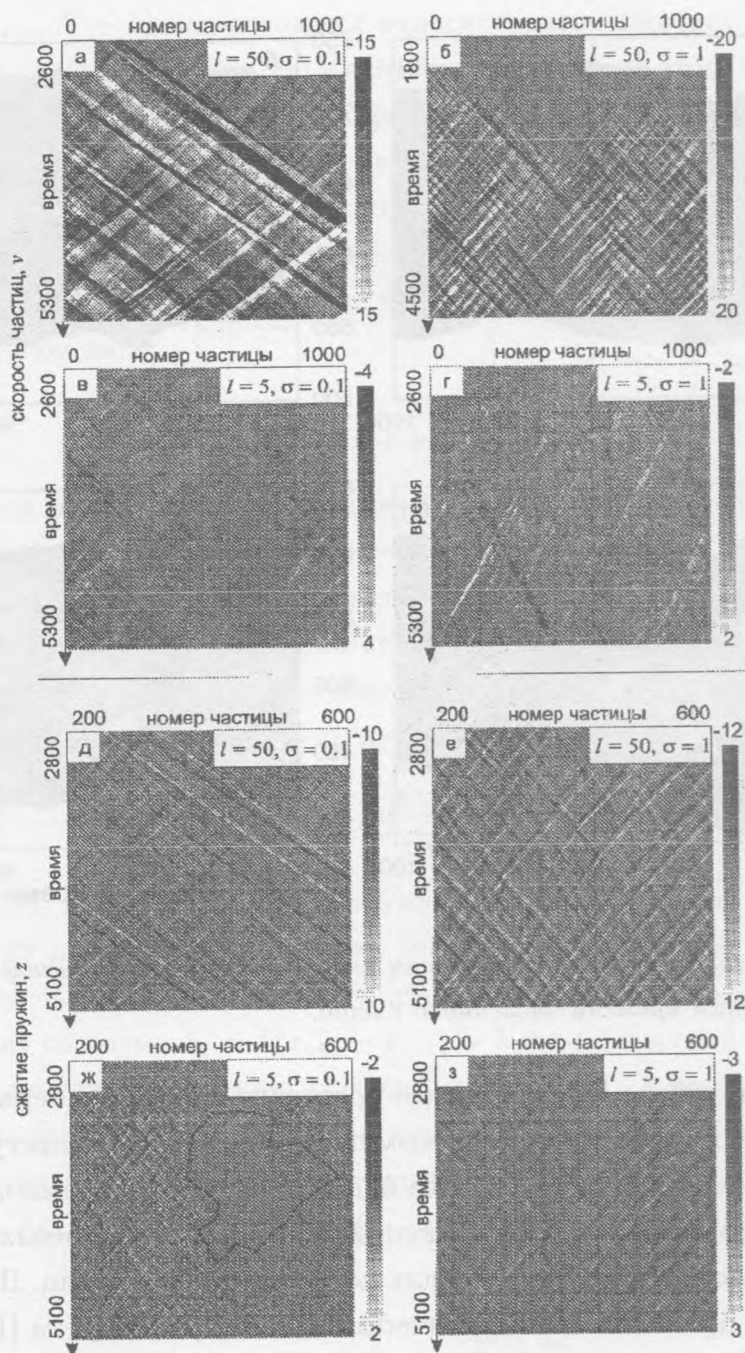


Рис. 2. Зависимость от времени скорости всех частиц (а, б, в, г) и величины относительного сжатия прилегающих к частице пружинок для фрагмента из 400 частиц (д, е, ж, з). Скорость и сжатие представлены цветом, шкала соответствия цвета и значений – справа от каждого рисунка.

случайно и однородно распределены в единичном интервале. Другие параметры системы выбрались равными  $h_0 = 0.01$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\sigma_0 = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$  (слабое затухание) или  $\sigma = 1$  (сильное затухание).

Динамика системы представлена на рис. 1 и 2, откуда видно, что однородное распределение частиц оказывается неустойчивым и в системе формируются нестационарные пространственные структуры. Как и следовало ожидать для выбранной модели связанных осцилляторов, эти структуры в первом приближении напоминают нелинейные волны, распространяющиеся в обоих направлениях.

Приведенные результаты позволяют сделать следующие заключения. Во-первых, эти образования действительно являются кооперативными структурами – они сформированы синхронизованным движением многих частиц, что наиболее четко видно на рис. 1а,б и 2а,б,д,е, где представлена динамика “разреженной” системы осцилляторов ( $l = 50$ ). Во-вторых, при всех значениях выбранных параметров данные образования являются долгоживущими состояниями, их время жизни может быть порядка или более 1000 единиц времени. Напомним, что в выбранной системе единиц период индивидуальных колебаний осцилляторов в отсутствие динамических ловушек оказывается меньше 10. Кроме того, время жизни этих состояний значительно превышает характерный интервал времени, в течение которого частицы, формирующие в данный момент некоторое выделенное состояние, ему принадлежат. Тем самым, в-третьих, такие мезоскопические образования характеризуются “индивидуальной” жизнью, их динамика не контролируется напрямую особенностями движения частиц, их формирующих, в данный момент времени. В-четвертых, обнаруженные кооперативные состояния являются диссипативными структурами, они могут зарождаться и исчезать, как это хорошо видно на рис. 2б,е. В-пятых, с точки зрения нарушения симметрии системы, т.е. локальной неравномерности сжатия или растяжения пружин (искажения), выражаемой величиной  $z_i = x_i - \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})$ , возникающие диссипативные состояния образованы связанной парой локальных искажений противоположного знака (рис. 2д,е). В-шестых, эти долгоживущие образования могут быть достаточно сложной структуры. Например, как это видно на рис. 1б, возникшие фрагменты кооперативного движения частиц сами могут образовывать сверхструктуры больших масштабов в пространстве и во времени. В завершение к перечисленным свойствам отметим особенность динамики рассматриваемой цепочки осцилляторов, которая обнаруживается наиболее наглядно в “плотной” системе со “слабой” диссипацией (рис. 2ж). На этом рисунке штрих-пунктиром выделена макроскопическая область, которая соответствует симметричному состоянию ( $z = 0$ )

некоторого достаточно большого фрагмента цепочки осцилляторов. Как уже отмечалось выше, такое состояние является устойчивым относительно малых возмущений и только возмущения конечной амплитуды способны его разрушить. Других стационарных состояний система не имеет. Симметричное состояние становится выделенным по отношению к другим образованиям. Эта гипотеза подтверждается появлением резких пикообразных максимумов на функции распределения  $\mathcal{P}(z)$  локальных искажений цепочки в точке  $z = 0$  (последний результат частично представлен в работе [9]).

*Резюмируя* полученные результаты, отметим следующее. Показано, что в рассмотренной цепочке осцилляторов наличие динамических ловушек (форм. (1, 2)) приводит к формированию долгоживущих макроскопических диссипативных структур. Эти структуры обладают “индивидуальной” жизнью – их свойства не определяются непосредственно деталями динамики частиц, формирующих их в данный момент времени. Более того, характерный интервал времени, в течение которого данные частицы принадлежат выделенной структуре, значительно меньше времени жизни этих структур.

Все это позволяет рассматривать возникновение таких образований как формирование особых динамических состояний в данной цепочке осцилляторов. Термин “динамические состояния” используется, чтобы подчеркнуть тот факт, что в системе существует только одно стационарное состояние и для реализации наблюдаемых структур частицы должны все время двигаться. При этом в целом влияние динамических ловушек на данную цепочку осцилляторов естественно трактовать как неравновесный фазовый переход нового типа, обусловленный аномалиями кинетических коэффициентов.

Работа была частично поддержана грантом Б0056 федеральной программы “Интеграция”, а также грантами РФФИ NN 05-02-16533 и 05-01-00723.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Helbing D. Rev. Mod. Phys., **73**, 1067 (2001).
- [2] Кацнельсон А. А., Олемской А. И., Сухорукова И. В., Ревкевич Г. П. УФН, **165**, N 3, 331 (1995).
- [3] Авдюхина В. М., Анищенко А. А., Кацнельсон А. А., Ревкевич Г. П. Перспект. матер., **4**, 11 (2002).
- [4] Lubashevsky I. A., Gafiyshuk V. V., and Demchuk A. V. Physica A, **255**, 406 (1998).

- [5] Lubashevsky I., Mahnke R., Wagner P., and Kalenkov S. Phys. Rev. E, **66**, 016117 (2002).
- [6] Kerner B. S. Physics of Traffic (Springer, Berlin, 2004).
- [7] Lubashevsky I., Hajimahmoodzadeh M., Katsnelson A., and Wagner P. Eur. Phys. J. B, **36**, 115 (2003).
- [8] Lubashevsky I., Hajimahmoodzadeh M., Katsnelson A., and Wagner P. Arxiv:cond-mat/0310189.
- [9] Lubashevsky I., Mahnke R., Hajimahmoodzadeh M., and Katsnelson A. Arxiv:cond-mat/0407324.
- [10] Wagner P. and Lubashevsky I. Arxiv:cond-mat/0311192.
- [11] Burrage K. and Burrage P. M. App. Num. Math., **22**, 81 (1996).
- [12] Burrage P. M. Numerical methods for stochastic differential equations, Ph. D. Thesis (University of Queensland, Brisbane, Queensland, Australia, 1999).

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 19 октября 2004 г.