ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И ЭЛЕКТРОФИЗИКА

УДК 533.9.01

ПЛАЗМЕННАЯ ВОЛНА СТОКСА

А. М. Игнатов

Получены решения кинетического уравнения Власова для функции распределения с резкими границами в виде нелинейных периодических волн. Показано, что амплитуда волны ограничена, причем волны с максимальной амплитудой имеют обострения на гребне волны.

Ключевые слова: ленгмюровские волны, волна Стокса.

Как известно, частота нелинейной ленгмюровской волны в холодной плазме не зависит от амплитуды (напр., [1, гл. 8]). В настоящей заметке исследуется частное решение уравнения Власова для плазмы с конечным разбросом по скоростям в виде периодической волны произвольной амплитуды.

Начнем с одномерного уравнения Власова для функции распределения электронов $f(t,x,v)$

$$\frac{\partial f(t,x,v)}{\partial t}+v\frac{\partial f(t,x,v)}{\partial x}-\frac{e}{m}\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial x}\frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v}=0 \tag{1}$$

и Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi(t,x)}{\partial x^2}=-4\pi e\left(\int dv\, f(t,x,v)-n_0\right), \tag{2}$$

где e и m – заряд и масса электрона, n_0 – плотность ионного фона, который считается неподвижным, и $\phi(x)$ – потенциал самосогласованного электрического поля.

Уравнение (1) описывает течение несжимаемой жидкости в фазовом пространстве. На этом обстоятельстве основан один из методов решения уравнения Власова, называемый методом водяного мешка (waterbag) [2]. Этот метод основан на том, что в процессе эволюции площадь области, ограниченной контуром $f(t,x,v)=\text{const}$, остается неизменной. В частности, решение (1) можно искать в виде постоянной функции $f(t,x,v)=f_0$ внутри некоторой области фазового пространства $V^{(-)}(t,x)\le v/V_T\le V^{(+)}(t,x)$, где величина V_T характеризует разброс по скоростям. В явном виде функция распределения

ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: aign@fpl.gpi.ru.

записывается как

$$f(t, x, v) = f_0 \theta[v - V_T V^{(-)}(t, x)] \theta[V_T V^{(+)}(t, x) - v], \tag{3}$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Выбор функции распределения в виде (3) представляет интерес в двух отношениях. Во-первых, он позволяет на качественном уровне исследовать влияние теплового разброса на структуру нелинейных волн. Во-вторых, в отсутствие возмущений функция (3) совпадает с функцией распределения Ферми–Дирака, то есть (3) описывает нелинейную волну в вырожденной плазме.

Подставим (3) в уравнения (1), (2) и введем безразмерные переменные $t' = \omega_p t$, $x' = \omega_p x / V_T$, $\phi' = e\phi/(mV_T^2)$, где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ – квадрат плазменной частоты. Опуская штрихи у безразмерных переменных и полагая, что постоянная фазовая плотность равна $f_0 = n_0/(2V_T)$, получаем

$$\frac{\partial V^{(\pm)}(t, x)}{\partial t} + V^{(\pm)}(t, x) \frac{\partial V^{(\pm)}(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} = 1 - n(t, x), \tag{5}$$

где плотность электронов равна

$$n(t, x) = \frac{1}{2} \left[V^{(+)}(t, x) - V^{(-)}(t, x) \right]. \tag{6}$$

Решение системы уравнений (4), (5) ищется в виде периодической волны $V^{(\pm)}(t, x) = V^{(\pm)}(\theta)$, $\phi(t, x) = \phi(\theta)$, где $V^{(\pm)}(\theta) = V^{(\pm)}(\theta + 2\pi)$, $\phi(\theta) = \phi(\theta + 2\pi)$ и фаза $\theta = kx - \omega t$.

Интегрирование уравнений (4) приводит к системе квадратных уравнений для скоростей $V^{(\pm)}(\theta)$. Выберем корни этих уравнений и константы интегрирования так, чтобы для невозмущенной плазмы при $\phi(\theta) = 0$ скорости $V^{(\pm)}(\theta) = \pm 1$. Тогда в явном виде имеем

$$V^{(+)}(\theta) = u - \mathrm{sign}(u - 1)\sqrt{(u - 1)^2 - 2\phi(\theta)},$$

$$V^{(-)}(\theta) = u - \sqrt{(u + 1)^2 - 2\phi(\theta)}, \tag{7}$$

где $u = \omega/k$ – фазовая скорость волны, и для определенности считается, что $u > 0$. Решение (7) определяет максимальное значение электрического потенциала волны $\phi(\theta) < \phi_{\max} = (u - 1)^2/2$.

При помощи (7) и (6) уравнение Пуассона (5) можно переписать в виде

$$k^2\phi''(\theta) = -\frac{\partial U(\phi(\theta))}{\partial \phi(\theta)}, \tag{8}$$

где

$$U(\phi) = \frac{1}{6}\left((u-1)^2 - 2\phi\right)^{3/2} - \frac{1}{6}\left((u+1)^2 - 2\phi\right)^{3/2} - \phi. \tag{9}$$

Периодические решения (8) существуют при условии $U''(\phi) > 0$, откуда следует ограничение на фазовую скорость $u > 1$. Это ограничение физически вполне очевидно: при $0 < u < 1$ фазовая скорость волны может совпадать со скоростью частиц плазмы, что приводит к затуханию Ландау, и незатухающие волны существуют лишь при наличии дополнительных групп захваченных частиц.

Используя (6), (7), выразим потенциал через плотность плазмы

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2}\left(u^2 + 1 - n(\theta)^2 - \frac{u^2}{n(\theta)^2}\right), \tag{10}$$

при этом плотность может изменяться в интервале $0 < n(\theta) < n_{\max} = \sqrt{u}$. Из уравнения Пуассона (5) теперь следует уравнение на плотность плазмы

$$(n_{\max}^4 - n(\theta)^4)n''(\theta) = \frac{n'(\theta)^2\left(n(\theta)^4 + 3n_{\max}^4\right)}{n(\theta)} + \frac{(1-n(\theta))n(\theta)^3}{k^2}. \tag{11}$$

Первый интеграл уравнения (11) записывается в виде

$$F(\theta) = \frac{n'(\theta)^2\left(n_{\max}^4 - n(\theta)^4\right)^2}{2n(\theta)^6} - \tag{12}$$

$$-\frac{1}{6k^2 n(\theta)^2}\left[2n(\theta)^5 - 3n(\theta)^4 + 3(n_{\max}^4+1)n(\theta)^2 + 6n_{\max}^4 n(\theta) - 3n_{\max}^4\right].$$

Допустим, что при $\theta = 0$ плотность достигает максимума $n(0) = n_0$, $n'(0) = 0$ и $1 < n_0 < n_{\max}$. Тогда из условия $F = \mathrm{const}$ (12) следует решение уравнения (11)

$$\theta(n, n_0) = \sqrt{3}kn_0 \int\limits_n^{n_0} dx\, \frac{n_{\max}^4 - x^4}{x^2\sqrt{n_0 - x}\sqrt{P(x, n_0)}}, \tag{13}$$

где

$$P(x, n_0) = -2n_0^2 x^4 + 3(2n_0 - 1)n_{\max}^4 x - 3n_0 n_{\max}^4 + (3 - 2n_0)n_0^2 x^2(n_0 + x). \tag{14}$$

На верхнем пределе интегрирования в (13) $P(n_0, n_0) = 6n_0(n_0 - 1)(n_{\max}^4 - n_0^4) \geq 0$. Поэтому при $1 < n_0 < n_{\max}$ решение (13) определяет в неявном виде гладкую периодическую функцию $n(\theta)$. Если же величина n_0 стремится к максимальному значению

$n_0 \to n_{\max}$, то сингулярность в (13) на верхнем пределе интегрирования пропадает, и в этом случае в точках $\theta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1 \ldots)$ производная $n'(\theta)$ терпит разрыв. В явном виде характер поведения решения $n(\theta)$ в окрестности точек максимума можно получить непосредственно из первого интеграла (12)

$$n(\theta) = n_{\max} - \frac{\sqrt{n_{\max} - 1}}{2k}|\theta - 2\pi m| + \ldots \qquad (15)$$

Таким образом, предельное решение с $n_0 \to n_{\max}$ аналогично волне Стокса на глубокой воде, для которой гребень волны имеет остроконечную форму (напр., [3, §250]).

Два примера численного решения уравнения (11) приведены на рис. 1. Сплошной линией на рисунке показана волна максимальной амплитуды ($n_0 = n_{\max}$) с обострениями на гребне. Из (10) следует, что в окрестности точки, где плотность достигает максимума, разрывна также первая производная функции $V^{(+)}(\theta)$ (7). Потенциал $\phi(\theta)$ и функция $V^{(-)}(\theta)$ оказываются более гладкими – у них разрывна третья производная. Пример области фазового пространства для волны Стокса, в которой функция распределения отлична от нуля, показан на рис. 2.

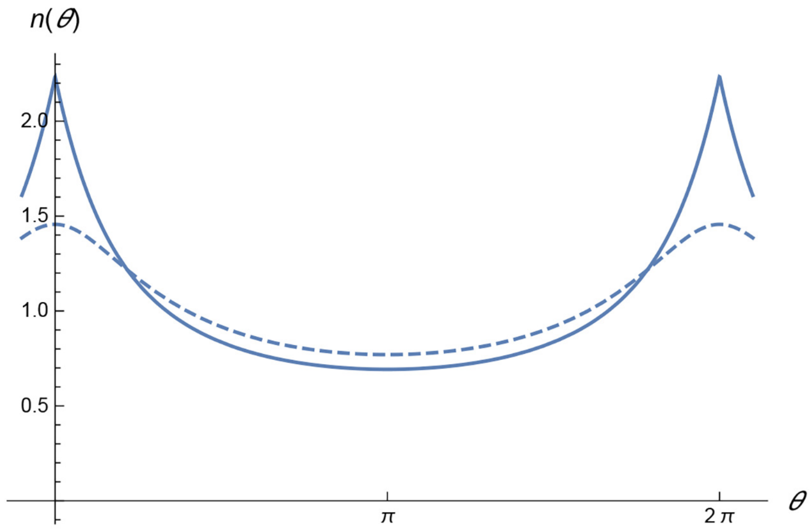

Рис. 1: *Распределение плотности в периодической волне, $u = 5$. Сплошная линия – $n_0 = \sqrt{5}$, пунктирная линия – $n_0 = 1.46$.*

Если $n_1(n_0)$ – максимальный корень полинома (14), соответствующий условию $n_1(n_0) < n_0$, то зависимость волнового вектора k от амплитуды волны n_0 получается из условия $\theta(n_1, n_0) = \pi$ (13). Зависимость k от фазовой скорости u для волны максимальной амплитуды $n_0 = n_{\max}$, полученная численным интегрированием (13), показана на рис. 3.

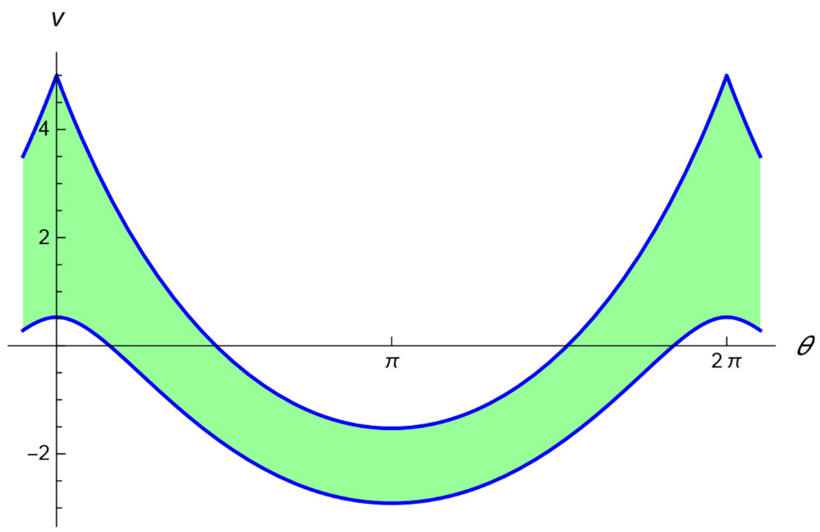

Рис. 2: *Область фазового пространства с отличной от нуля функцией распределения,* $u = 5$.

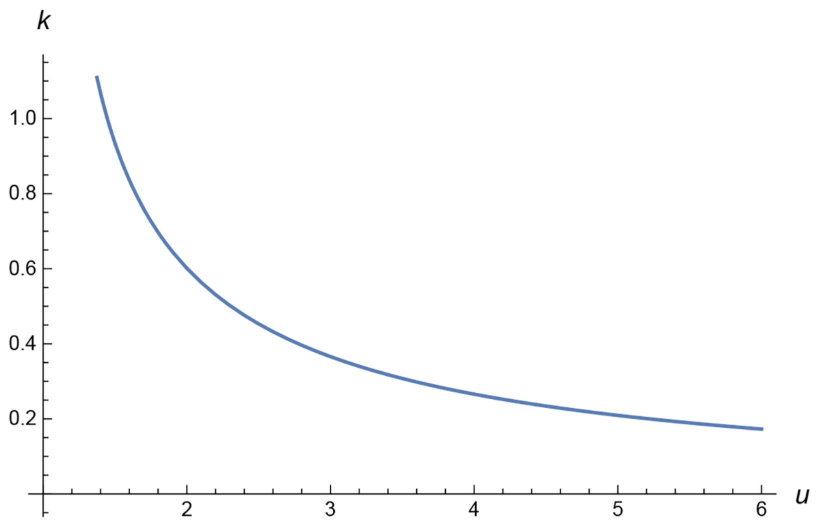

Рис. 3: *Зависимость волнового вектора от фазовой скорости для волны предельной амплитуды.*

В предельных случаях больших и малых фазовых скоростей зависимость $k(u)$ можно получить, вычисляя асимптотики интеграла $\theta(n_1, n_{\max})$ (13). В пределе $u \to \infty$, соответствующему холодной плазме, волновой вектор $k \to 1/u$, то есть частота $\omega \to 1$ не зависит от амплитуды волны. При малой фазовой скорости $u \to 1$ имеем $k \approx \pi/(6\sqrt{n_{\max} - 1})$, то есть $\omega \approx k + \pi^2/(18k)$.

Таким образом, в работе построены решения уравнения Власова в плазме с конечным разбросом электронов по скоростям в виде нелинейных периодических волн. Показано, что существуют предельные решения в виде волн с острыми гребнями, аналогичные волнам Стокса на глубокой воде.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы* (М., Наука, 1974).

[2] Д. Поттер, *Вычислительные методы в физике* (М., Мир, 1975).

[3] Г. Ламб, *Гидродинамика* (М.-Л., ОГИЗ, 1947).

Поступила в редакцию 2 марта 2026 г.

После доработки 13 марта 2026 г.

Принята к публикации 18 марта 2026 г.