УДК 539.184

МАЛОЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛЕПТОНОВ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Д. К. Пометко, А. П. Мартыненко, Ф. А. Мартыненко, А. В. Эскин

Вычислены уровни энергии основных состояний трехчастичных и четырехчастичных связанных состояний лептонов в квантовой электродинамике. Для расчета использован вариационный метод с гауссовскими базисными функциями. Матричные элементы гамильтониана вычислены аналитически. Для численных расчетов написан компьютерный код в системе MATLAB.

Ключевые слова: позитроний, мюоний, ион позитрония, молекула позитрония, молекула мюония.

1. Введение. Малолептонные системы (позитроний, ион позитрония, молекула позитрония, молекула мюония и др.) состоят из заряженных лептонов, которые в основном взаимодействуют посредством электромагнитных сил, а фундаментальной теорией для их описания является квантовая электродинамика (КЭД) [1, 2]. Благодаря отсутствию такой структуры как, например, у протона, лептонные системы заняли важное место в физике элементарных частиц. Изучение их уровней энергии и ширин распада позволило осуществлять проверку калибровочной теории взаимодействия частиц с высокой точностью, определять значения фундаментальных физических констант. В течение многих десятилетий исследовались в основном двухчастичные лептонные состояния (позитроний и мюоний), но позднее стали изучаться трехчастичные (ион позитрония) [3] и четырехчастичные (молекула позитрония, молекула мюония) системы [4, 5]. Эти экзотические системы представляют интерес не только для физиков-теоретиков, но и для исследователей в области атомной и молекулярной физики, позволяют изучать сложный механизм образования связанных состояний многих частиц [6, 7].

Исследования систем с малым количеством лептонов в основном были сосредоточены на связанных состояниях, исследование резонансных состояний проводилось в значительно меньшей степени. До сих пор не исследовались резонансные состояния тетра-

Самарский университет, 443086 Россия, Самара, Московское ш., 34; e-mail: pometko-darja@yandex.ru.

лептона с участием мюонов. Это отчасти связано со значительно возросшей сложностью систем из четырех тел по сравнению с системами из трех тел. Фактически, расчет резонансных состояний требует гораздо больше вычислительных ресурсов, чем расчет связанных состояний [8]. С развитием экспериментальных установок может стать возможным создание состояний тетралептона, содержащих мюоны. Например, Супер Тау-Чарм фабрики могут стать потенциальной платформой для создания и изучения этих состояний тетралептона. Кроме того, с усовершенствованием пучков мюонов такие состояния потенциально могут быть созданы путем введения пучка мюонов в электронный газ.

В дополнение к внутренней ценности исследования самих состояний тетралептона есть еще одна причина, по которой система тетралептона имеет важное значение. Она состоит в том, что связанные состояния четырех лептонов имеют много общего с недавно открытыми состояниями тетракварка, которые интенсивно изучались в течение последних двух десятилетий, начиная с 2003 года. Для тяжелых тетракварков малая кинетическая энергия кварка приводит к более короткому расстоянию между кварками и тем самым делает доминирующим цветоэлектрическое кулоновское взаимодействие, как и в системе тетралептона. Поэтому систему тетралептона можно рассматривать как КЭД-аналог состояния тетракварка. Изучение таких связанных состояний тетралептона может дать более глубокое понимание природы состояний тетракварка. Система тяжелых кварков, в которой доминируют кулоновские взаимодействия, должна проявлять свойства, аналогичные свойствам тетралептона.

Цель нашей работы состоит в изучении трехчастичных и четырехчастичных лептонных связанных сотояний, включая гидриды позитрония и мюония, в рамках вариационного метода.

2. Общий формализм. В нерелятивистском приближении система трех или четырех частиц описывается уравнением Шрёдингера, а гамильтониан системы, содержащий оператор кинетической энергии и парные потенциалы кулоновских взаимодействий, является частью гамильтониана Брейта в квантовой электродинамике. Исследование трехчастичных состояний выполнено нами в ряде работ [8–10]. В данной работе мы развиваем использованный нами вариант вариационного подхода на случай четырех частиц. Гамильтониан системы четырех частиц с кулоновским взаимодействием в нерелятивистском приближении имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2 - \frac{1}{2m_3}\Delta_3 - \frac{1}{2m_4}\Delta_4 + \sum_{i,j=1,i>j}^{4} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

где e_i – электрические заряды частиц, r_{ij} – расстояния между зарядами, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ – радиус-векторы частиц в исходной системе отсчета, Δ_i (i=1, 2, 3, 4) – оператор Лапласа.

В рамках вариационного метода в координатном представлении перейдем к координатам Якоби $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\sigma}$, которые связаны с исходными координатами в системе центра масс следующим образом:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_4}{m_{1234}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{123}}\boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_4}{m_{1234}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{123}}\boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}, \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_3 = -\frac{m_4}{m_{1234}}\boldsymbol{\sigma} + \frac{m_{12}}{m_{123}}\boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{r}_4 = \frac{m_{123}}{m_{1234}}\boldsymbol{\sigma},$$

где m_i – масса i-частицы, $m_{ij} = m_i + m_j$, $m_{1234} = \sum_{i=1}^{4} m_i$.

Координата $\boldsymbol{\rho}$ обозначает относительное расстояние между парой частиц 1 и 2. Координата $\boldsymbol{\lambda}$ обозначает относительное расстояние между частицей 3 и центром масс частиц 1 и 2. Координата $\boldsymbol{\sigma}$ обозначает относительное расстояние между частицей 4 и центром масс частиц 1, 2, 3.

Переходя к координатам Якоби, оператор кинетической энергии может быть представлен в системе центра масс в виде суммы трех членов, каждый из которых содержит оператор Лапласа по соответствующим переменным:

$$\hat{T} = \frac{\mathbf{p}_\rho^2}{2\mu_1} + \frac{\mathbf{p}_\lambda^2}{2\mu_2} + \frac{\mathbf{p}_\sigma^2}{2\mu_3}, \tag{3}$$

где приведенные массы частиц μ_1, μ_2, μ_3 определяются следующими выражениями:

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_{12}}, \quad \mu_2 = \frac{m_3 m_{12}}{m_{123}}, \quad \mu_3 = \frac{m_4 m_{123}}{m_{1234}}. \tag{4}$$

Для нахождения волновой функции системы вариационным методом обычно используется ее экспоненциальная или гауссова форма [11–13]. Мы выбираем вариационные функции основного состояния четырехчастичной системы в гауссовой форме, как и в предыдущих работах [9, 10, 14–16]:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{A}\sum_{I=1}^{K} C_I e^{-\frac{1}{2}\left[A_{11}(I)\boldsymbol{\rho}^2 + 2A_{12}(I)\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda} + A_{22}(I)\boldsymbol{\lambda}^2 + 2A_{13}(I)\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\sigma} + 2A_{23}(I)\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + A_{33}(I)\boldsymbol{\sigma}^2\right]}, \tag{5}$$

где K – размер базиса, $A_{ij}(I)$ – матрица нелинейных вариационных параметров, C_I – линейные вариационные параметры. Оператор $\mathcal{A}$ обозначает соответствующую симметризацию или антисимметризацию волновой функции, т. е. это такой оператор, который создает конечную волновую функцию с правильной перестановочной симметрией.

Во многих рассматриваемых системах в этом исследовании существуют пары тождественных фермионов. Полная волновая функция системы частиц, которая включает координатную и спиновую волновые функции, должна быть антисимметричной при перестановке тождественных фермионов.

При определении энергий связанных состояний лептонов вариационным методом необходимо найти такие значения параметров и коэффициентов разложения, при которых среднее значение гамильтониана будет минимальным. Для получения энергий связанных состояний уравнение Шрёдингера с кулоновским взаимодействием четырех частиц сводится к матричной задаче на собственные значения вида:

$$HC = E^{\lambda}BC, \tag{6}$$

где матричные элементы гамильтониана $H_{ij} = \langle\psi_i|H|\psi_j\rangle$ и нормировочные коэффициенты $B_{ij} = \langle\psi_i|\psi_j\rangle$ вычисляются аналитически с использованием вариационных волновых функций (5), а E^{λ} – одно из собственных значений энергии. Верхняя граница для энергии состояния системы из четырех частиц в вариационном подходе определяется наименьшим собственным значением обобщенной задачи на собственные значения (6).

Условие нормировки для волновой функции (5) содержит интеграл, который вычисляется аналитически и имеет вид:

$$B = \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\lambda} \int d\boldsymbol{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(B_{11}\boldsymbol{\rho}^2 + 2B_{12}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda} + B_{22}\boldsymbol{\lambda}^2 + 2B_{13}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\sigma} + 2B_{23}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + B_{33}\boldsymbol{\sigma}^2)} = \frac{(2\pi)^{9/2}}{(\mathrm{det}B)^{3/2}}, \tag{7}$$

где введена матрица параметров B_{ij} с детерминантом

$$\mathrm{det}B = B_{11}B_{22}B_{33} - B_{11}B_{23}^2 - B_{12}^2B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - B_{13}^2B_{22}, B_{kl}(I,J) =$$

$$= A_{kl}(I) + A_{kl}(J). \tag{8}$$

В результате коэффициент нормировки волновой функции (5) в координатном представлении определяется формулой (см. (8)):

$$\mathcal{N} = \sum_{I=1}^{K}\sum_{J=1}^{K} C_I C_J \frac{(2\pi)^{9/2}}{(\mathrm{det}B(I,J))^{3/2}}, \tag{9}$$

где матричные элементы B_{kl} в (9) зависят от двух индексов суммирования.

Вычислим также матричные элементы кинетической и потенциальной энергии, необходимые для решения матричной задачи на собственные значения. Оператор кинетической энергии состоит из трех членов, определяемых операторами Лапласа для переменных $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\sigma}$. Все эти матричные элементы выражаются в терминах вариационных параметров и имеют вид:

$$\left\langle \Delta_\rho \right\rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} \Big[A_{11}^2(B_{22}B_{33}-B_{23}^2)+A_{12}^2(B_{11}B_{33}-B_{13}^2)+A_{13}^2(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)-A_{11}\det B+ \\ +2A_{11}A_{12}(B_{13}B_{23}-B_{12}B_{33})+2A_{11}A_{13}(B_{12}B_{23}-B_{13}B_{22})+2A_{12}A_{13}(B_{12}B_{13}-B_{11}B_{23})\Big], \tag{10}$$

$$\left\langle \Delta_\lambda \right\rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} \Big[A_{12}^2(B_{22}B_{33}-B_{23}^2)+A_{22}^2(B_{11}B_{33}-B_{13}^2)+A_{23}^2(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)-A_{22}\det B+ \\ +2A_{22}A_{12}(B_{13}B_{23}-B_{12}B_{33})+2A_{22}A_{23}(B_{12}B_{13}-B_{11}B_{23})+2A_{12}A_{23}(B_{12}B_{23}-B_{13}B_{22})\Big], \tag{11}$$

$$\left\langle \Delta_\sigma \right\rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} \Big[A_{13}^2(B_{22}B_{33}-B_{23}^2)+A_{23}^2(B_{11}B_{33}-B_{13}^2)+A_{33}^2(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)-A_{33}\det B+ \\ +2A_{13}A_{23}(B_{13}B_{23}-B_{12}B_{33})+2A_{33}A_{13}(B_{12}B_{23}-B_{13}B_{22})+2A_{33}A_{23}(B_{12}B_{13}-B_{11}B_{23})\Big]. \tag{12}$$

Матричные элементы потенциальной энергии представляют собой в нерелятивистском приближении матричные элементы парных кулоновских взаимодействий. Прямое вычисление соответствующих интегралов с волновыми функциями (5) дает следующие результаты:

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{B_{11}B_{33}-B_{13}^2-\frac{m_2}{m_{12}}(2B_{12}B_{33}-2B_{13}B_{23}-\frac{m_2}{m_{12}}(B_{22}B_{33}-B_{23}^2))}}, \tag{13}$$

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{(B_{22}B_{33}-B_{23}^2)}}, \tag{14}$$

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-\frac{m_{12}}{m_{123}}(2B_{12}B_{13}-2B_{11}B_{23}-\frac{m_{12}}{m_{123}}(B_{11}B_{33}-B_{13}^2))}}, \tag{15}$$

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{B_{11}B_{33}-B_{13}^2+\frac{m_1}{m_{12}}(2B_{12}B_{33}-2B_{13}B_{23}+\frac{m_1}{m_{12}}(B_{22}B_{33}-B_{23}^2))}}, \tag{16}$$

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{F_{14}}}, \quad F_{14} = \frac{m_3}{m_{123}}(2B_{12}B_{13}-2B_{11}B_{23})+\frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33}-B_{13}^2)+$$

$$+B_{11}B_{22}-B_{12}^2+\frac{m_2}{m_{12}}(\frac{m_3}{m_{123}}(2B_{13}B_{23}-2B_{12}B_{33})+2B_{12}B_{23}-2B_{13}B_{22})+\frac{m_2^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33}-B_{23}^2), \tag{17}$$

$$\left\langle\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_4|}\right\rangle=\frac{32\pi^4}{\det B\sqrt{F_{24}}},\quad F_{24}=\frac{m_3}{m_{123}}(2B_{12}B_{13}-2B_{11}B_{23})+\frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33}-B_{13}^2)+$$

$$+B_{11}B_{22}-B_{12}^2-\frac{m_1}{m_{12}}(\frac{m_3}{m_{123}}(2B_{13}B_{23}-2B_{12}B_{33})+2B_{12}B_{23}-2B_{13}B_{22})+\frac{m_1^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33}-B_{23}^2). \tag{18}$$

Аналогично могут быть вычислены матричные элементы гамильтониана, описывающие поправки в тонкой и сверхтонкой структуре спектра для увеличения точности расчетов.

3. Результаты и обсуждение. В работе выполнены исследования уровней энергии трехчастичных и четырехчастичных лептонных связанных состояний в рамках стохастического вариационного метода в квантовой электродинамике. Особенность нашего подхода при расчете уровней энергии состоит в использовании гауссовских вариационных функций. Уравнение Шрёдингера для связанного состояния четырех частиц (или трех частиц) сведено к матричному уравнению, которое решалось численно с помощью программы в системе Матлаб. В качестве основы для написания программы взяты оригинальная программа Варга–Сузуки на языке Фортран из [12] и наша программа для расчета трехчастичных энергетических уровней из предыдущих работ [9, 10, 14]. В общем случае, эффективность вариационного метода при решении уравнения (6), зависит от алгоритмов, используемых для оптимизации нелинейных параметров в волновой функции. Вторая особенность нашего подхода при решении вариационной задачи связана с использованием координат Якоби в волновой функции связанного состояния (5). Проведенные расчеты показывают, что использование пробных гауссовых функций в вариационном методе позволяет получить значения энергий связанных состояний лептонов, которые хорошо согласуются с предыдущими расчетами, выполненными в других подходах. Размер базиса в разложении (5) варировался от 600 до 800, и использовались циклы уточнения. Результаты численных расчетов и их сравнение с некоторыми результатами других авторов [17–22] представлено в табл. 1 в электронных атомных единицах (e.a.u): 1 $e.a.u.=27.211385$ эВ. В табл. 1 включены результаты для четырехчастичных систем HPs (гидрид позитрония) и HMu (гидрид мюония). Некоторое различие наших результатов и [17–22] из табл. 1 (не более 0.04%) связано на наш взгляд с двумя обстоятельствами. Во-первых, использовался разный размер базиса. Во-вторых, формулировка самого вариационного подхода (выбор координат, вида базисных функций) несколько различна. Так, например, в работах [20–22] выбирались периметрические относительные координаты и экспоненциальные вариационные функции.

Таблица 1

Энергии связи лептонных состояний в электронных атомных единицах (e.a.u.)

Связанное состояние	Данная работа	[4]	[5]	[17]	[21] [22]	[26]	[27]	[28]	[18]
Mu_2	–1.140230	–	–	–1.141013	–	–	–	–	–
Ps_2	–0.515982	–0.516003	–	–	–	–0.515989	–	–	–
$MuPs$	–0.786262	–	–	–	–0.786317	–	–	–	–
Ps^-	–0.261954	–	–	–	–	–	–0.262005	–	–
Mu^-	–0.525054	–	–	–	–0.525054	–		–	–
HPs	–0.788819	–0.788867	–0.788870	–	–	–	–	–	–
HMu	–1.148355	–	–	–	–	–	–	–1.150187	–
TMu_2	–106.6603	–	–	–	–	–	–	–	–106.2055

Результаты выполненного исследования показывают, что уровни энергии связанных состояний различных лептонов (прежде всего с e^-, e^+, μ^+, μ^-), определены с хорошей численной точностью. Такие лептонные связанные состояния можно наблюдать экспериментально. Так, например, были открыты связанные состояния электронов и позитронов (трехчастичное состояние – ион позитрония Ps^-, четырехчастичное состояние – молекула позитрония Ps_2) [3, 4, 23–25]. Экспериментальные исследования таких систем включают не только определение уровней энергии, но и измерение ширин распада. Гидрид позитрония HPs был открыт в [29] при изучении столкновения позитронов и молекул метана. Следующим шагом могло бы быть проведение эксперимента по созданию реальной системы мюоний–позитроний $MuPs$, наблюдение ее распадов и измерение некоторых свойств. Одной из главных проблем при создании конденсированной мюониевой материи является очень короткое время жизни мюона в связанном состоянии [30]. Переход от позитрония и мюония к трехчастичным и четырехчастичным связанным состояниям лептонов при исследовании уровней энергии является вполне естественным, так как открывает новые возможности для проверки теории связанных состояний в Стандартной модели. В табл. 1 включен результат для молекулы TMu_2 (true muonium), состоящей из ($\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$). Образование молекулы димюония TMu_2 вполне аналогично молекуле позитрония Ps_2. Единственный энергетический масштаб в такой кулоновской системе определяется массой мюона, что в итоге приводит к значительному росту энергии связи по сравнению с другими результатами в табл. 1. Для сравнения заметим, что связанные или резонансные состояния в системе $(\mu^+e^-\mu^-e^+)$ (молекула мюоний–антимюоний) отсутствуют, так как пара тяжелых лептонов $(\mu^+\mu^-)$ образует диполь с малым дипольным моментом, что приводит к слабому взаимодействию с оставшимися (e^-e^+) [6, 7]. При работе программы расчета стабилизация результатов не наступает.

Данное исследование выполнено в нерелятивистском приближении с гамильтонианом (1). Расчеты поправок в спектре энергии для увеличения точности, а также исследование ряда других лептонных систем планируется в дальнейшем. Мы представили полученные результаты в табл. 1 с точностью до 6 цифр после запятой. В нашем подходе при выборе размера базиса 800 наступает стабилизация работы программы и эти шесть цифр не меняются. Но неучтенные поправки (релятивистские поправки, контактное взаимодействие, поправки сверхтонкой структуры) в гамильтониане системы вносят свой вклад в полный результат. Численная оценка этих поправок, которая определяется общим фактором α^2 [8, 9], может давать изменение в 4–5 цифрах после запятой.

Авторы благодарны В. И. Коробову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант РНФ No. 25-72-00029) (Ф.А.М.).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] M. Eides, Phys. Lett. B **795**(10), 113 (2019). https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.06.011.

[2] G. S. Adkins, D. B. Cassidy, J. Perez-Rioz, Phys. Rep. **975**(1), 1 (2022). https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.05.002.

[3] M. Puchalski, A. Czarnecki, S. G. Karshenboim, Phys. Rev. Lett. **99**, 203401 (2007). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.203401.

[4] S. Bubin, L. Adamowicz, Phys. Rev. A **74**, 052502 (2006). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.052502.

[5] S. Bubin, K. Varga, Phys. Rev. A **84**, 012509 (2011). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.012509.

[6] D. Bressanini, M. Mella, G. Morosi, Phys. Rev. A **55**(1), 200 (1997). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.55.200.

[7] T. K. Rebane, N. D. Markovski, Phys. Atom. Nucl. **66**(2), 203 (2003). https://doi.org/10.1134/1.1553491.

[8] A. V. Eskin, V. I. Korobov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, Phys. Atom. Nucl. **88**(4), 602 (2025). https://doi.org/10.1134/S1063778825601179.

[9] V. I. Korobov, A. V. Eskin, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, Phys. Rev. A **109**, 032802 (2024). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.032802.

[10] В. И. Коробов, А. П. Мартыненко, Ф. А. Мартыненко, А. В. Эскин, Краткие сообщения по физике ФИАН **50**(6), 37 (2023). https://doi.org/10.3103/S1068335623060052.

[11] В. И. Коробов, ФЭЧАЯ **53**(1), 5 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063779622010038.

[12] K. Varga, Y. Suzuki, Comp. Phys. Comm. **106**(1-2), 157 (1997). https://doi.org/10.1016/S0010-4655(97)00059-3.

[13] K. Pachucki, J. Komasa, Chem. Phys. Lett. **389**(1-3), 209 (2004). https://doi.org/10.1016/j.cplett.2004.03.069.

[14] F. A. Martynenko, A. V. Eskin, A. P. Martynenko, Phys. Rev. D **112**, 116009 (2025). https://doi.org/10.1103/bp6k-2sxg.

[15] A. V. Eskin, V. I. Korobov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, Phys. Part. Nucl. **56**(2), 235 (2025). DOI: 10.1134/S1063779624701466.

[16] А. П. Мартыненко, Ф. А. Мартыненко, В. В. Сорокин и др., Краткие сообщения по физике ФИАН **46**(4), 54 (2019). https://doi.org/10.3103/S1068335619040092.

[17] M.-S. Wu, Y. Zhang, J.-Y. Zhang, et al., Phys. Rev. A **110**, 042822 (2024). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.110.042822.

[18] Y. Ma, L. Meng, L.-Zh. Wen, Sh.-L. Zhu, Phys. Rev. D **111**, 073001 (2025). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.111.073001.

[19] K. Hu, D.-X. Zhao, K.-D. Wang, et al., Phys. Rev. A **112**, 042809 (2025). https://doi.org/10.1103/6k4y-vljq.

[20] A. M. Frolov, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **50**, 105102 (2017). DOI: 10.1088/1361-6455/aa6a40.

[21] A. M. Frolov, Eur. Phys. J. D **69**, article number 50 (2015). https://doi.org/10.1140/epjd/e2015-50824-2.

[22] A. M. Frolov, Phys. Lett. A **345**(1-3), 173 (2005). https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.07.021.

[23] D. B. Cassidy, A. P. Mills Jr, Nature **449**, 195 (2007). http://dx.doi.org/10.1038/nature06094

[24] F. Fleischer, K. Degreif, G. Gwinner, et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 063401 (2006). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.063401.

[25] Y. Nagashima, Phys. Rep. **545**(3), 95 (2014). https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.07.004.

[26] S. Bubin, M. Stanke, D. Kedziera, L. Adamowicz, Phys. Rev. A **75**, 062504 (2007). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.062504.

[27] E. Z. Liverts, N. Barnea, Comp. Phys. Comm. **184**(11), 2596 (2013). https://doi.org/10.1016/j.cpc.2013.06.013.

[28] B.-L. Zhou, J.-M. Zhu, Z.-Ch. Yan, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **38**(3), 305 (2005). DOI: 10.1088/0953-4075/38/3/014.

[29] D. M. Schrader, F. M. Jacobsen, N.-P. Fradsen, U. Mikkelsen, Phys. Rev. Lett. **69**, 57 (1992). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.57.

[30] Y. Kora, M. Boninsegni, D. Th. Son, Sh. Zhang, Phys. Rev. Research **3**, 023113 (2021). https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.023113.

Поступила в редакцию 18 февраля 2026 г.

После доработки 15 апреля 2026 г.

Принята к публикации 16 апреля 2026 г.