УДК 533.9

# ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧАСТНОГО СПЕКТРА МГД ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ УТОПЛЕННОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕЙ

В. Г. Кирцхалия, А. А. Рухадзе

*Анализируются приближенные решения дисперсионного уравнения собственных колебаний утопленной плоской плазменной струи в областях малых и больших фазовых скоростей распространения возмущений. Показано, что при малых фазовых скоростях спектр частот МГД волн сплошной и колебания носят поверхностный характер, а при больших скоростях спектр частот дискретный и колебания объемные.*

Дисперсионное уравнение, описывающее собственные колебания идеально проводящей, сжимаемой утопленной плоской плазменной струи в магнитодинамическом приближении, имеет вид [1 – 3]:

$$\frac{N_2(\xi)}{\nu N_1(\xi)} = -\frac{m_2}{m_1}\mathrm{th}(m_1\delta), \tag{1}$$

где $m_i^2 = N_i(\xi)M_i(\xi)/D_i(\xi)$, $i = 1; 2$, причем, $i = 1$ относится к внутренней области струи, $i = 2$ – к внешней. Здесь введены следующие обозначения:

$$N_1(\xi) = b_1^2 - \xi^2,\ N_2(\xi) = b_2^2 - (a-\xi)^2,\ M_1(\xi) = \mu_1^2 - \xi^2,\ M_2(\xi) = \mu_2^2 - (a-\xi)^2,$$

$$D_1(\xi) = \mu_1^2 b_1^2 - (\mu_1^2 + b_1^2)\xi^2,\ D_2(\xi) = \mu_2^2 b_2^2 - (\mu_2^2 + b_2^2)(a-\xi)^2, \tag{2}$$

а также безразмерные величины:

$$\xi = \frac{V - U_p}{C}, a = \frac{V}{C},\ b_1 = \frac{V_{A1}}{C},\ b_2 = \frac{V_{A2}}{C},\ \nu = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$\mu_1 = \frac{C_1}{C},\ \mu_2 = \frac{C_2}{C},\ \delta = \frac{kd}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}, \tag{3}$$

$V$ – скорость струи относительно неподвижной плазменной среды, $V_{Ai} = H_i/\sqrt{4\pi\rho_i}$ – скорость Альфвена, $H_i$ – напряженность магнитного поля, $\rho_i$ – плотность, $C_i$ – скорость звука, $C$ – постоянная, имеющая размерность скорости, $d$ – толщина струи, $U_p = \omega/\kappa$ – фазовая скорость, $\lambda$ – длина волны возмущения, которая задается в виде плоской волны

$$f_i(x,z,t) = \tilde{f}_i(z)\exp[i(kx-\omega t)]. \tag{4}$$

Предполагается также, что векторы $\vec{V}, \vec{k}$ и $\vec{H}_i$ направлены вдоль оси $X$, а волны, генерируемые струей во внешнюю среду – поверхностные, чему соответствует $m_2^2 > 0$.

Ниже показано, что неравенство $m_i^2 > 0$, обусловленное требованием поверхностности волн [4], имеет более глубокий смысл, а именно, его решение дает классификацию МГД волн и интервалы изменения их фазовых скоростей. Решения неравенств $m_1^2 > 0$ и $m_2^2 > 0$ в приближении малой сжимаемости ($\mu_i > b_i$) имеют соответственно вид:

$$\xi \in (-\mu_1; -b_1) \cup \left(-\frac{\mu_1 b_1}{\sqrt{\mu_1^2 + b_2^2}}; \frac{\mu_1 b_1}{\sqrt{\mu_1^2 + b_2^2}}\right) \cup (b_1; \mu_1), \tag{5}$$

$$\xi \in (a-\mu_2; a-b_2) \cup \left(a - \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}}; a + \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}}\right) \cup (a+b_2; a+\mu_2). \tag{6}$$

В приближении большой сжимаемости ($\mu_i < b_i$) средние интервалы, соответствующие поперечным МГД волнам Альфвеновского типа не изменяются, а в боковых интервалах, соответствующих продольным магнитозвуковым волнам, $\mu_i$ и $b_i$ меняются местами.

В приближении несжимаемости $\mu_i = \infty$ интервалы (5) и (6) становятся сплошными и фазовая скорость может принимать любое значение. В этом случае, $m_1 = m_2 = 1$ и уравнение (1) переходит в квадратное уравнение относительно $\xi$. Условие устойчивости струи находится из требования нетривиальности его дискриминанта и записывается в виде

$$a^2 \leq \frac{(\nu \mathrm{th}\delta + 1)(\nu \mathrm{th}\delta b_1^2 + b_2^2)}{\nu \mathrm{th}\delta}. \tag{7}$$

Так как $\mathrm{th}\delta < 1$, то из (7) следует, что определяющую роль в стабилизации плоской плазменной струи играет внешнее магнитное поле. Учитывая это обстоятельство, можно положить, что $b_1 = 0$.

В приближении малой сжимаемости, пока $m_1^2 > 0$, уравнение (1) может иметь реальные корни лишь в том случае, если $N_1(\xi)$ и $N_2(\xi)$ имеют разные знаки, что равносильно требованию, чтобы внутри и вне струи генерировались волны различной природы [4], причем там, где $N_i(\xi) > 0$, распространяются волны Альфвеновского типа, а там, где $N_i(\xi) < 0$ – магнитозвуковые. В нашем случае $N_1(\xi) = -\xi^2 < 0$ и, следовательно, внутри струи распространяются звуковые волны, а вне – волны Альфвеновского типа, причем, интервалы изменения фазовых скоростей этих волн (5) и (6) определяются следующим соотношением

$$\xi \in \left(a - \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}}; a + \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}}\right) \cap (-\mu_1; \mu_1). \tag{8}$$

Отсюда следует необходимое (но не достаточное) условие устойчивости струи

$$a - \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}} < \mu_1 \Rightarrow a < \mu_1 + \frac{\mu_2 b_2}{\sqrt{\mu_2^2 + b_2^2}}. \tag{9}$$

Из результатов работы [3] следует, что приближенное решение уравнения (1) в предположении $b_1 = 0$:

$$\xi_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{b_2^2[1 + \nu(1+\varepsilon)\text{th}\delta] - a^2\nu(1+\varepsilon)\text{th}\delta}}{\nu(1+\varepsilon)\text{th}\delta + 1}, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{b_2^2}{\nu\text{th}\delta + 1}\left[\frac{\nu^2\text{th}^2\delta}{\mu_2^2} + \left(1 - \frac{2\delta}{\text{sh}2\delta}\right)\frac{1}{\nu\mu_{11}^2\text{th}\delta}\right] \tag{11}$$

– малая величина, определяющая влияние сжимаемости. Из (10) видно, что $\xi_{1,2}$ могут принимать любые значения в интервале (8) при изменении $\delta$ от 0 до $\infty$ и, следовательно, спектр частот МГД волн является сплошным.

Рассмотрим теперь уравнение (1) при $m_1^2 < 0$, т.е. когда $|\xi| > \mu_1$ и таким образом $m_1 = i\sqrt{|m_1^2|}$. В этом случае генерация поверхностных волн внутри струи невозможна, и следовательно, они объемные (звуковые). Исходя из того, что фазовые скорости возмущений большие, будем полагать, что они заключены в боковых интервалах (6) и соответствуют поверхностным магнитозвуковым волнам во внешней области струи. Учитывая также, что $\text{th}(i\sqrt{|m_1^2|\delta}) = i\text{tg}(\sqrt{|m_1^2|\delta})$ и $D_2(\xi) \approx \mu_2^2 N_2(\xi)$, ибо $\mu_2 > b_2$, уравнение (1) в данном приближении примет вид:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\xi}{\mu_1}\delta\right) = \frac{\mu_2}{\mu_1 \nu \xi} \frac{b_2^2 - (a-\xi)^2}{\sqrt{\mu_2^2 - (a-\xi)^2}}. \qquad (12)$$

Можно показать, что в левом боковом интервале (6) правая часть уравнения (12) монотонно растет от $-\infty$ до 0, а в правом – монотонно убывает от 0 до $-\infty$, причем резкое падение его значения происходит в непосредственной близости от внешних границ ($\xi = a \pm \mu_2$). В остальной части интервалов она является медленно меняющейся функцией от $\xi$ и, обозначив ее среднее значение через $\theta$, приближенное решение уравнения (12) можно записать в виде

$$\xi = \frac{\mu_1}{\delta}(\mathrm{arctg}\theta + n\pi). \qquad (13)$$

Таким образом, спектр частот объемных магнитозвуковых волн, генерируемых плоской плазменной струей, является дискретным. Для существования хотя бы одного корня достаточно, чтобы ширина интервала была больше периода функции $\mathrm{tg}(\xi\delta/\mu_1)$, т.е.

$$\mu_2 - b_2 > \frac{\mu_1}{\delta}\pi \qquad (14)$$

и следовательно,

$$n < \frac{\delta(\mu_2 - b_2)}{\mu_1 \pi}. \qquad (15)$$

Видно, что чем больше $\delta$ (чем меньше длина волны), тем лучше выполняются неравенства (14) и (15) и, следовательно, генерация магнитозвуковых волн с дискретным спектром частот возможна в случае коротковолновых возмущений.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Кирцхалия В. Г. Сообщения АН ГССР, **117**, N 2, 282 (1983).

[2] Parcer E. N. Astrophys. J., **39**, 690 (1964).

[3] Жвания И. А., Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. ЖТФ, **74**, вып. 11, 132 (2004).

[4] Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11, 50 (2003).

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 7 февраля 2005 г.