УДК 537.52

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ НАТЯЖЕНИЯ

Е. М. Юрков, С. И. Яковленко

Проведено рассмотрение устойчивости цилиндрической полости в вязкой жидкости для случая, когда имеет место не поверхностное натяжение, а поверхностное расталкивание. Показано, что при отрицательном коэффициенте натяжения аксиально-симметричная мода неустойчива относительно возмущений с длиной волны меньшей окружности поперечного сечения полости и устойчива относительно возмущений с длиной волны большей окружности поперечного сечения полости. Скорость движения поверхности в ходе развития неустойчивости характеризуется величиной, пропорциональной коэффициенту поверхностного расталкивания и обратно пропорциональной коэффициенту динамической вязкости.

Эта работа является продолжением нашей предыдущей работы [1], в которой рассмотрены условия возникновения неустойчивости цилиндрической полости в жидкости с отрицательным коэффициентом поверхностного натяжения. Основное отличие настоящего рассмотрения от предыдущего [1] состоит в учете вязкости. Мы следуем методу, изложенному в книге [2].

Постановка задачи.

Исходные уравнения. Будем исходить из следующей системы уравнений для несжимаемой вязкой жидкости [3, с. 73]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\Pi - \nu\Delta\mathbf{v},\ \mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Здесь использованы обозначения: $\mathbf{v} = \{v_r, v_z, v_\varphi\}$ – скорость (r, z, φ – цилиндрические координаты); $\Pi = \delta p/\rho$ – удельное давление, δp – отклонение давления от равновесного значения, ρ – плотность; $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость, η – динамическая вязкость.

Далее будет рассматриваться развитие малой радиальной деформации $\xi(t, z, \varphi)$ поверхности цилиндрической полости:

$$r = R + \xi(t, z, \varphi),\ \xi(t, z, \varphi) = \varepsilon(t) \cdot e^{i(kz+m\varphi)},\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \varepsilon^{\gamma t}, \tag{2}$$

где R – радиус невозмущенного цилиндра; ε_0 – амплитуда возмущения; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число возмущения в z-направлении (λ – длина волны возмущения); m – целое число, характеризующее аксиальную моду возмущения; γ – инкремент нарастания возмущения.

Далее рассматривается осесимметричное движение ($m = 0$). В этом случае векторы $\mathbf{v}$ и $\nabla\Pi$ являются полоидальными: у них отсутствуют азимутальные компоненты.

Связь давления с характеристиками возмущения. Из уравнения (1) имеем $\Delta\Pi = 0$, как и в случае отсутствия вязкости. Соответственно, также как и в [1, 2], имеем:

$$\Pi = F_0 \xi \cdot K_m(kr) = \varepsilon F_0 \cdot K_m(kr) \cdot e^{i(kz+m\varphi)}. \tag{3}$$

Здесь $K_m(kr)$ – функции Макдональда; константа F_0 определяется из граничных условий.

Граничные условия. Исходная система (1) представляет собой два уравнения для компонент скоростей v_r, v_z и третье уравнение для давления. Соответственно, необходимы три граничных условия:

1. Радиальная компонента скорости v_r должна совпадать со скоростью изменения деформируемой поверхности;

2. Тангенциальная компонента вязкого напряжения должна исчезать при $r = R$;

$$\sigma_{rz} = \rho\nu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{r=R} = 0; \tag{4}$$

3. (r, r)-я компонента полного тензора напряжения на деформируемой границе должна быть равна поверхностному давлению

$$\left(p+\delta p-2\nu\rho\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_R=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{5}$$

Здесь $\alpha=|\alpha|$ – коэффициент поверхностного расталкивания; R_1, R_2 – главные радиусы кривизны поверхности (они считаются положительными, когда направлены внутрь полости). При этом давление внутри жидкости больше, чем в полости – в отличие от случая поверхностного натяжения, когда больше давление в полости.

Дисперсионное соотношение.

Выражение для проекций скорости. Поле скоростей $\mathbf{v}$ является осесимметричным соленоидальным векторным полем. Такое поле можно представить в виде (подробнее см. [2]):

$$\mathbf{v}=-r\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2U)\mathbf{e}_z, \tag{6}$$

где U – произвольная скалярная функция. В книге [2] также показано, что из векторного уравнения (1) для функции U с учетом (3) справедливо уравнение:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dU}{dr}-\left(k^2+\frac{\gamma}{\nu}\right)U=\frac{-i\varepsilon_0F_0}{\nu}\frac{K_1(kr)}{r}. \tag{7}$$

Используя дифференциальное соотношение, справедливое для функций Макдональда:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d}{dr}\right)\frac{K_1(\alpha r)}{r}=\alpha^2\frac{K_1(\alpha r)}{r},$$

можно выписать общее решение уравнения (7):

$$U=i\left[A\frac{K_1(\kappa r)}{r}+\frac{\varepsilon_0F_0}{\gamma}\frac{K_1(kr)}{r}\right], \tag{8}$$

где $\kappa^2=k^2+\gamma/\nu$, A – постоянная интегрирования. При этом для соответствующих компонент скорости имеем:

$$v_r=k\left[AK_1(\kappa r)+\frac{\varepsilon_0F_0}{\gamma}K_1(kr)\right]e^{ikz+\gamma t}, \tag{9а}$$

$$v_z=-i\left[A\kappa K_0(\kappa r)+\frac{\varepsilon_0F_0}{\gamma}kK_0(kr)\right]e^{ikz+\gamma t}. \tag{9б}$$

Определение констант интегрирования. Первое из перечисленных в разделе "Постановка задачи" граничных условий дает:

$$\varepsilon_0\gamma = k\left[AK_1(y) + \frac{\varepsilon_0 F_0}{\gamma}K_1(x)\right], \tag{10}$$

где $x = kR$ и $y = \kappa R$.

Из второго граничного условия, используя формулу (4) и выражения (9) для компонент скорости, имеем:

$$\rho\nu\left\{k^2 rU + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2U)\right)\right\}e^{ikz+\gamma t} = 0.$$

Проводя преобразования с использованием (8), получаем:

$$\rho\nu r\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dU}{dr} + k^2U\right)e^{ikz+\gamma t} = \rho\nu r\left\{\left(2k^2 + \frac{\gamma}{\nu}\right)U - i\frac{\varepsilon_0 F_0}{\nu}\frac{K_1(kr)}{r}\right\}e^{ikz+\gamma t} =$$

$$= \rho\nu i\left\{\left(2k^2 + \frac{\gamma}{\nu}\right)\left(AK_1(\kappa r) + \frac{\varepsilon_0 F_0}{\gamma}K_1(kr)\right) - \frac{\varepsilon_0 F_0}{\nu}K_1(kr)\right\}e^{ikz+\gamma t} = 0.$$

Отсюда для постоянной интегрирования A получаем следующее выражение:

$$A = \frac{\varepsilon_0 F_0}{\gamma}\frac{-2k^2}{k^2+\kappa^2}\frac{K_1(x)}{K_1(y)}.$$

Подставив его в соотношение (10), получаем:

$$\gamma^2 = -\frac{F_0}{R}\frac{k^2-\kappa^2}{k^2+\kappa^2}xK_1(x).$$

Константу интегрирования F_0 определяем из граничного условия (5) с использованием выражения

$$\left(\frac{\delta p}{\rho}\right)_R = -\frac{\alpha}{R^2\rho}(1-x^2)\xi = \varepsilon_0 F_0 K_0(x)e^{ikz+\gamma t}.$$

Подробнее см. [1, 2]. Подставив это выражение в формулу (5), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\alpha}{\rho R^2}(1-x^2)\varepsilon_0 e^{ikz+\gamma t} + F_0 K_0(x)\varepsilon_0 e^{ikz+\gamma t} = 2\nu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_R.$$

Вычисляя радиальную производную, исходя из формулы (9а), группируя члены подходящим образом, получаем в неявном виде требуемое общее дисперсионное уравнение:

$$2x^2(x^2+y^2)\frac{K_1'(x)}{K_0(x)}\left[1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\,\frac{K_1(x)}{K_1(y)}\,\frac{K_1'(y)}{K_1'(x)}\right]+(x^4-y^4)=J\frac{xK_1(x)}{K_0(x)}(1-x^2). \tag{11}$$

Здесь обозначено:

$$J=\frac{\alpha}{R^3\rho}\left(\frac{R^2}{\nu}\right)^2=\frac{\alpha R}{\rho\nu^2}. \tag{12}$$

Дисперсионное соотношение типа (11) получено для случая жидкой цилиндрической струи в воздухе [2]. Случай неустойчивости полости в вязкой жидкости в книге [2] не рассматривался.

Предел большой вязкости.

В силу того, что стекло обладает аномально большой вязкостью, наибольший интерес представляет предел: $y=x+\delta$ при $\delta << x$. Ограничиваясь первым порядком по δ, произведем замены $x^2+y^2\to 2x^2+2x\delta$; $2xy\to 2x^2+2\delta x$; $-(x^4-y^4)\to 4x^3\delta$ и проведем преобразования:

$$\frac{K_1(x)}{K_1(y)}\,\frac{K_1'(y)}{K_1'(x)}=\frac{K_1(x)}{K_1(x+\delta)}\,\frac{K_1'(x+\delta)}{K_1'(x)}=$$

$$=\frac{K_1(x+\delta)-\delta K_1'(x+\delta)}{K_1(x+\delta)}\,\frac{K_1'(x)+\delta K_1''(x)}{K_1'(x)}=$$

$$=\left[1-\frac{\delta K_1'(x+\delta)}{K_1(x+\delta)}\right]\left[1+\frac{\delta K_1''(x)}{K_1'(x)}\right]\to 1+\delta\left[\frac{K_1''}{K_1'}-\frac{K_1'}{K_1}\right].$$

Тогда левая часть уравнения (11) примет более компактный вид:

$$-4x^3\delta-4x^4\delta\frac{K_1'}{K_0}\left(\frac{K_1''}{K_1'}-\frac{K_1'}{K_1}\right)=$$

$$=-4x^3\delta\left\{1+\frac{x}{K_0K_1}\left[\left(K_1-\frac{1}{x}\left(-K_0-\frac{1}{x}K_1\right)+\frac{1}{x^2}K_1\right)K_1-\left(K_0+\frac{1}{x}K_1\right)^2\right]\right\}=$$

$$=-4x^4\delta\left\{-\frac{K_0}{K_1}+\frac{K_1}{K_0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right\}=J\frac{xK_1(x)}{K_0(x)}(1-x^2).$$

Здесь аргументы всех функций Бесселя зависят от x; использованы рекуррентные соотношения для функций Макдональда: $K_0' = -K_1$, $K_1' = -K_0 - \frac{1}{x}K_1$. Учитывая далее $2x\delta = \gamma R^2/\nu$, характеристическое уравнение преобразуем следующим образом:

$$\frac{\gamma R^2}{\nu} = J\frac{x^2-1}{\frac{K_0}{K_1}2x^2\left[-\frac{K_0}{K_1}+\frac{K_1}{K_0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right]} = J\frac{x^2-1}{2\left[-x^2\frac{K_0^2}{K_1^2}+(1+x^2)\right]}.$$

Используя выражение для J, окончательно имеем:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\eta R}\cdot f(x),\ f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2(1-K_0^2(x)/K_1^2(x))}. \tag{13}$$

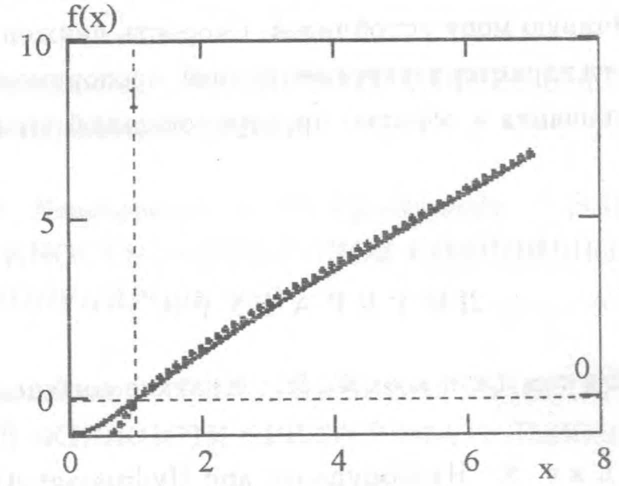

Рис. 1. *Функции, характеризующие устойчивость и неустойчивость осесимметричной моды возмущения. Сплошная кривая – функция $f(x)$; пунктирная кривая задается предельным выражением: $(x^2-1)/x$, справедливым для достаточно больших значений $x >> 1$.*

Зависимость $f(x)$ представлена на рис. 1. Видно, что при значениях $x > 1$ инкремент положителен. Это свидетельствует о неустойчивости такой цилиндрической волноводной структуры относительно коротковолновых возмущений. Таким образом, вязкость имеет сдерживающий характер по отношению к неустойчивости, но не может сделать неустойчивую моду устойчивой. Длинноволновое же возмущение (по сравнению с длиной окружности цилиндра), как и следовало ожидать, стремится "распрямиться" за счет расталкивательных сил по окружности и с течением времени затухнет.

Отметим, что скорость движения поверхности в ходе развития неустойчивости характеризуется величиной $u = \gamma R = \alpha/\eta$. Эта величина вычислена в работе [4].

Следует обратить внимание на монотонный характер дисперсионной зависимости на "неустойчивом" интервале $kr > 1$. Моды максимальной неустойчивости не существует. Чем меньше длина волны возмущения, тем быстрее проявляется неустойчивость. Отметим также, что в реальных условиях, рассмотренных в [4], развитие мелкомасштабных неустойчивостей будет ограничено конечной толщиной слоя.

Итак, проведенное рассмотрение устойчивости цилиндрической полости в вязкой жидкости показывает, что при отрицательном коэффициенте натяжения аксиально-симметричная мода неустойчива относительно возмущений с длиной волны меньшей, чем внутренняя окружность поперечного сечения полости, и устойчива относительно возмущений с длиной волны большей окружности поперечного сечения полости. Аналогичный результат получен ранее для идеальной жидкости. Дело в том, что вязкость не может сделать неустойчивую моду устойчивой. Скорость движения поверхности в ходе развития неустойчивости характеризуется величиной, пропорциональной коэффициенту поверхностного расталкивания и обратно пропорциональной коэффициенту динамической вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Юрков Е., Яковленко С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11, 21 (2004).

[2] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford U. Press, Oxford, 1961), Chap. XII.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986, 736 с.

[4] Яковленко С. И. Квантовая электроника, **34** (8), 765 (2004).

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 3 декабря 2004 г.