

УДК 533.95

## МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕТРАЭДРИЧЕСКОГО ПЫЛЕВОГО КЛАСТЕРА

Н. Г. Гусейн-заде, А. М. Игнатов

*Теоретически исследуются колебания и устойчивость структуры тетраэдрической формы, состоящей из одноименных макрочастиц, удерживаемой в сферически-симметричной потенциальной яме.*

В последнее время наблюдается заметный рост интереса к исследованию сильно скоррелированных структур, состоящих из одноименно заряженных частиц. При большом количестве частиц такие структуры часто еще называют кулоновским или плазменным кристаллом. Интерес к сильно скоррелированным структурам объясняется тем, что их образование наблюдается во многих экспериментах. Например, простейшая трехмерная структура наблюдалась для системы ультрахолодных атомных ионов в различных ловушках [1 – 4]. Кристаллические состояния наблюдаются, кроме того, в коллоидных системах [5, 6] и в пылевой плазме [7, 8].

Экспериментально наблюдаются также кластеры, состоящие из нескольких частиц. В пылевой плазме обычно исследуются двумерные кластеры, расположенные в приэлектродном слое. Теория структуры [9] и колебаний [10] двумерных кластеров хорошо развита. Наконец, недавно в наземных условиях удалось создать трехмерный пылевой кластер [11]. Следует отметить, что в отличие от ионов в ловушках потенциал взаимодействия между пылинками в плазме не известен. Определенную информацию о взаимодействии пылинок можно, в частности, получить из экспериментально измеряемых спектров колебаний кластеров.

Целью настоящей работы является аналитическое исследование колебаний простейшей трехмерной структуры – правильного тетраэдра. Ниже получены спектры малых колебаний в пределе низкой температуры, когда тепловым движением можно полностью пренебречь. При этом потенциал взаимодействия между частицами не конкретизируется, что позволяет сопоставлять различные модели межчастичного взаимодействия с экспериментальными данными.

*Постановка задачи.* Рассмотрим систему из одноименно заряженных одномерных пылевых частиц, удерживаемых от распыливания внешним сферически симметричным потенциальным полем  $U(\mathbf{r})$ . Вблизи центра удерживающий потенциал можно аппроксимировать как  $U_{foc} = \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2)$ , где  $\omega_0$  – постоянная удержания, которая может быть определена из частоты колебаний отдельной частицы.

Парный потенциал взаимодействия в большинстве известных моделей является функцией расстояния между частицами. Для удобства дальнейшей записи будем считать, что потенциальная энергия взаимодействия является некоторой функцией квадрата расстояния, то есть  $U_{int}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2)$ , где  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  – координаты пылинок.

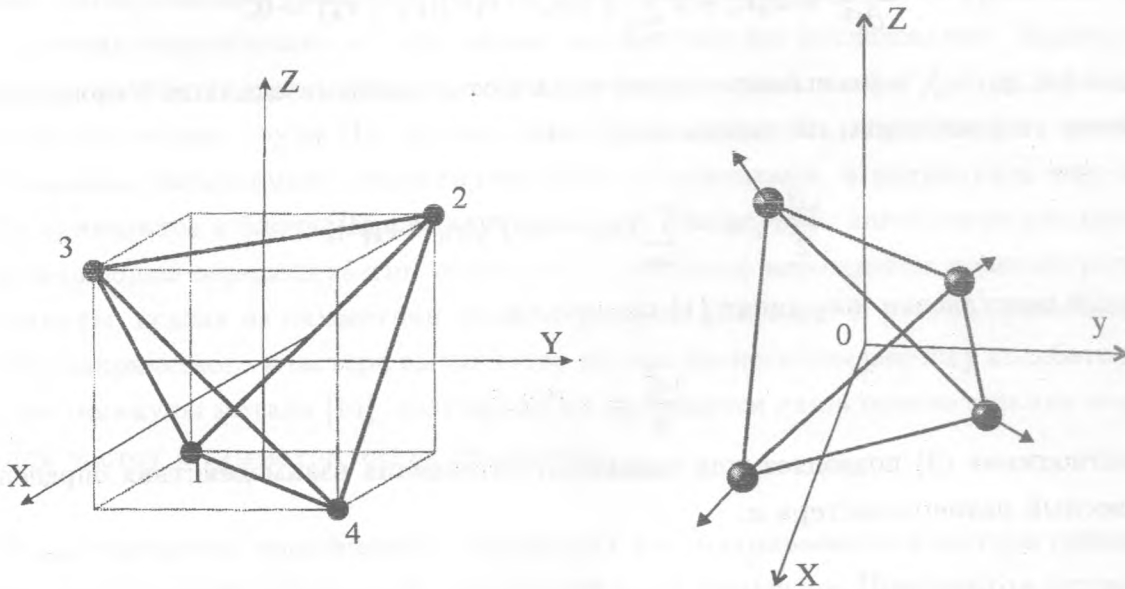


Рис. 1. Схема расположения пылинок.

Рис. 2. Полносимметричные колебания.

Простейшая трехмерная структура должна состоять как минимум из четырех частиц. Из соображений симметрии очевидно, что в равновесии четыре пылинки располагаются по вершинам правильного тетраэдра. Направим координатные оси  $X, Y, Z$  так, чтобы они соединяли середины противоположных ребер тетраэдра (см. рис. 1). Пронумеруем макрочастицы, лежащие в вершинах тетраэдра, цифрами 1, 2, 3 и 4. Тогда равновесные координаты макрочастиц равны:

$$\mathbf{r}_1 = (-a/2, -a/2, -a/2),$$

$$\mathbf{r}_2 = (-a/2, a/2, a/2), \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_3 = (a/2, -a/2, a/2),$$

$$\mathbf{r}_4 = (a/2, a/2, -a/2).$$

Полные уравнения движения ансамбля частиц записываются как

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_n}{\partial t^2} + \omega_0^2 \mathbf{r}_n + 2 \sum_{k \neq n} f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2) (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k) = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ , а массы всех частиц полагаются равными единице. Условие существования стационарного состояния имеет вид:

$$\frac{\omega_0^2}{2} \mathbf{r}_n = - \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k) f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2),$$

что после подстановки координат (1) сводится к

$$\frac{\omega_0^2}{8} = -f'(2a^2). \quad (3)$$

Соотношение (3) позволяет для заданного потенциала взаимодействия определить равновесный размер кластера  $a$ .

*Малые колебания.* Рассмотрим малые возмущения:

$$\mathbf{r}_n + \delta \mathbf{r}_n = (x_n + \delta x_n; y_n + \delta y_n; z_n + \delta z_n). \quad (4)$$

После подстановки (4) в (2) и линеаризации по малым отклонениям от положения равновесия получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta \ddot{x}_n + \frac{\omega_0^2}{2} \delta x_n + \sum' f'(2a^2) (\delta x_n - \delta x_k) + \sum' 2f''(2a^2) (x_n - x_k) \times \\ & \times ((x_n - x_k)(\delta x_n - \delta x_k) + (y_n - y_k)(\delta y_n - \delta y_k) + (z_n - z_k)(\delta z_n - \delta z_k)) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \delta \ddot{y}_n + \frac{\omega_0^2}{2} \delta y_n + \sum' f'(2a^2) (\delta y_n - \delta y_k) + \sum' 2f''(2a^2) (y_n - y_k) \times$$

$$\times((x_n - x_k)(\delta x_n - \delta x_k) + (y_n - y_k)(\delta y_n - \delta y_k) + (z_n - z_k)(\delta z_n - \delta z_k)) = 0;$$

$$\frac{1}{2}\delta\ddot{z}_n + \frac{\omega_0^2}{2}\delta z_n + \sum' f'(2a^2)(\delta z_n - \delta z_k) + \sum' 2f''(2a^2)(z_n - z_k) \times$$

$$\times((x_n - x_k)(\delta x_n - \delta x_k) + (y_n - y_k)(\delta y_n - \delta y_k) + (z_n - z_k)(\delta z_n - \delta z_k)) = 0, \quad (5)$$

где  $n, k = 1 \dots 4$  и  $\sum'$  означает суммирование по всем  $k \neq n$ .

Полагая гармоническую зависимость от времени  $\delta r \sim \exp(-i\nu t)$ , из системы (5) получаем дисперсионное уравнение для безразмерной частоты  $\nu$ . Это уравнение имеет 12-ю степень относительно  $\nu^2$ , что сильно затрудняет его исследование. Задача существенно упрощается при учете симметрии невозмущенной конфигурации частиц. Использование теории групп [13] позволяет от переменных  $\delta r_n$  перейти к их линейным комбинациям, называемым симметрическими координатами, в результате чего система (5) приводится к блочно-диагональной форме. Существует алгебраическая процедура, позволяющая определить тип колебаний, степень их вырождения и симметрические координаты, исходя из симметрии невозмущенного кластера. В рассматриваемом случае тетраэдрического кластера вычисления вполне аналогичны расчету колебательного спектра молекулы метана [14], поэтому ниже приводятся лишь окончательные выражения для частот и симметрических координат.

*Симметрические координаты.* Симметрия рассматриваемого кластера описывается точечной группой тетраэдра  $T_d$ , состоящей из 24 элементов. Помимо тождественного преобразования группа  $T_d$  включает в себя четыре оси третьего порядка, три оси второго порядка, отражения относительно плоскостей, проходящих через центр и одно из шести ребер тетраэдра, и по два зеркальных поворота вокруг каждой из осей второго порядка [13]. Существуют два трехмерных неприводимых представления, обозначаемых  $F_1$  и  $F_2$ , два одномерных представления ( $A_1$  и  $A_2$ ) и одно двумерное представление ( $E$ ). Соответственно спектр колебаний тетраэдрического кластера состоит из двух трехкратно вырожденных колебаний, одного двукратно вырожденного и одного невырожденного (из возможных двух невырожденных представлений в данном случае реализуется только одно).

Помимо точечной группы  $T_d$ , полная группа симметрии тетраэдрического кластера включает в себя трансляции вдоль трех координатных осей. Соответствующие симметрические координаты задаются трехмерным вектором

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^4 \delta \mathbf{r}_i. \quad (6)$$

Вычисляя вторую производную этого вектора при помощи (5,3), получаем  $\ddot{\mathbf{f}} = -\omega_0^2 \mathbf{f}$ .

Представление  $F_1$  соответствует вращению системы как целого вокруг одной из трех координатных осей. В явном виде симметрические координаты удобно записать как трехмерный вектор  $\mathbf{f}_1$  с компонентами

$$\begin{aligned} f_{1x} &= \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4; \\ f_{1y} &= \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 - \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4; \end{aligned} \quad (7)$$

$$f_{1z} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 - \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4.$$

Из физических соображений очевидно, что соответствующие частоты колебаний должны обращаться в нуль. Действительно, вычисляя  $\ddot{\mathbf{f}}_1$  при помощи уравнений (5) с учетом (3), легко убедиться, что  $\ddot{\mathbf{f}}_1 \equiv 0$ .

Одномерное представление  $A_1$  соответствует полностью симметричным колебаниям (рис. 2). Симметрическая координата, соответствующая  $A_1$ , имеет вид

$$a_1 = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 + \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 + \delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4. \quad (8)$$

Подставив это в уравнение (5) с учетом (3), получаем

$$\ddot{a}_1 + 32a^2 f''(2a^2)a_1 = 0. \quad (9)$$

Для симметрических координат, задающих базис двумерного неприводимого представления  $E$ ,

$$e_1 = \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 - \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4;$$

$$e_2 = 2(\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4) - \delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 \quad (10)$$

получаем

$$\ddot{e}_\alpha + 8a^2 f''(2a^2) e_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (11)$$

Поляризация колебаний этого типа показана на рис. 3.

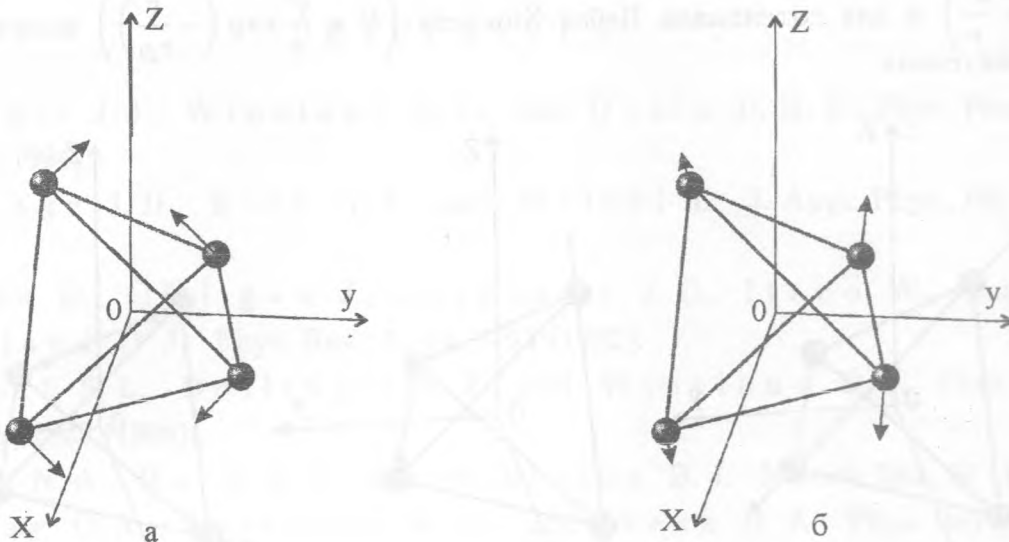


Рис. 3. Двукратно вырожденные колебания.

И наконец координаты, соответствующие трехмерному представлению  $F_2(3)$ , выглядят так:

$$Q_{3a} = \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 + \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4;$$

$$Q_{3b} = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 + \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4; \quad (12)$$

$$Q_{3c} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 + \delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 - \delta y_4.$$

Подставив это в уравнение (5), получаем уравнение для частоты трехкратно вырожденных колебаний

$$\ddot{Q}_3 + \omega_0^2 Q_3 + 8f'(2a^2) Q_3 + 16a^2 f''(2a^2) Q_3 = 0 \quad (13)$$

или с учетом баланса сил:

$$\ddot{Q}_3 + 16a^2 f''(2a^2) Q_3 = 0. \quad (14)$$

Таким образом, тетраэдрический кластер устойчив относительно любых малых возмущений при  $f''(2a^2) > 0$ .

В качестве примера рассмотрим несколько типичных случаев взаимодействия, встречающихся в пылевой плазме. Легко видеть, что для кулоновского взаимодействия ( $U = \frac{a^2}{r}$ ) и для потенциала Дебая-Хюккеля ( $U = \frac{q^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right)$ ) величина  $f''(2a^2)$  положительна.

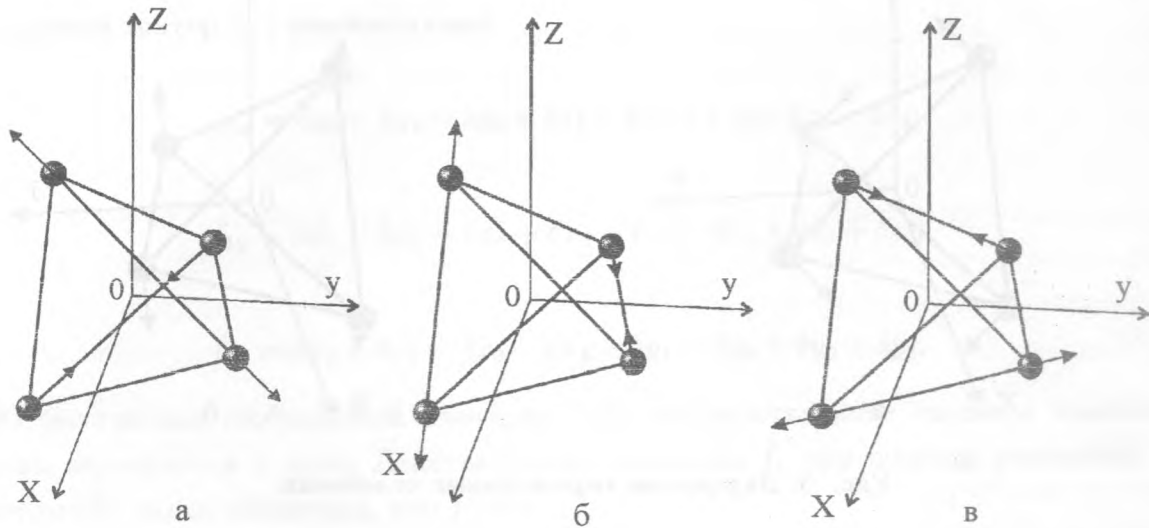


Рис. 4. Трехкратно вырожденные колебания.

Специфика пылевой плазмы проявляется в наличии добавочных сил притяжения, действующих на больших расстояниях и обусловленных рекомбинацией плазмы на поверхности пылевых частиц [7, 8]. При этом потенциал взаимодействия в некотором приближении записывается в виде  $U = q^2/r(e^{-r/r_D} - h)$ , где  $h$  – некоторая константа. Легко проверить, что при условии неотрицательности  $\omega_0^2 \geq 0$  в (3) величина  $f''(2a^2) > 0$ . В противном же случае  $\omega_0^2 < 0$ , который соответствует внешнему потенциалу, растягивающему кластер, существует диапазон изменений параметров, в котором  $f''(2a^2) < 0$ . Таким образом, для большинства ситуаций, характерных для пылевой плазмы, тетраэдрический кластер оказывается устойчивым.

В заключение отметим, что равновесный радиус  $a$  и частоты колебаний (9, 11, 14) определяются из экспериментальных данных. Хотя обычно точная величина удерживающей силы ( $\omega_0^2$ ) точно неизвестна, ее в принципе можно изменять, что приводит к вариации размера кластера  $a$ . Таким образом, можно восстановить зависимость потенциала межчастичного взаимодействия из измерений спектра колебаний кластера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 02-02-16439) и NWO (проект 047.016.020).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bolinger J. J., Wineland D. J., and Dubin D. H. E. *Phys. Plasmas*, **1**, 1403 (1994).
- [2] Prestage J. D., Dick G. J., and Maleki L. *J. Appl. Phys.*, **66**, 1013 (1989).
- [3] Raizen G., Gilligan J., Bergquist J. C., Itano W., and Wineland D. J. *Phys. Rev. A*, **45**, 6493 (1992).
- [4] Gilbert S. L., Bollinger J. J., and Wineland D. J. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 2022 (1988).
- [5] Clark N. A., Hurd A. J., and Ackerson B. J. *Nature*, **281**, 57 (1979); Murray C. A., Sprenger W. O., and Weak R. A. *Phys. Rev.*, **B42**, 688 (1990); Chen L. B. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 688 (1992).
- [6] Nesper S., Palberg T., Blechinger C., and Leiderer P. *Prog. Colloid Polim. Sci*, **104**, 194 (1997).
- [7] Цытович В. Н., Морфилл Г., Томас Х. *Физика плазмы*, **28**, N 8, 623 (2002).
- [8] Нефедов А. П., Петров О. Ф., Фортвов В. Е. *УФН*, **167**, N 11, 1215 (1997).
- [9] Kong Minghui, Partoens B., Peeters F. *New J. Phys.*, **5**, 23.1 (2003).
- [10] Amiranashvili Sh. G., Gusein-zade N. G., and Tsytoovich V. N. *Phys. Rev.*, **E64**, 016407 (2001).
- [11] Arr O., Block D., Piel A., and Melzer A. *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 165004 (2004).
- [12] Rafac R., Schiffer J. P., Hangste J. S., Dubin D. H. E., Wales D. J. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **88**, 483 (1991).
- [13] Любарский Г. Я. *Теория групп и ее применения в физике*, М., Физ.-мат.лит., 1958.



- [14] Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул, М., Наука, 1972.

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 20 декабря 2004 г.