

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ СЛАБОТОЧНОГО УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА ПРИ НЕРЕЗОНАНСНОЙ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Ю. В. Бобылев

*Показано, что в случае сильного взаимодействия слабо-
точного ультрарелятивистского электронного пучка с
плотной плазмой вблизи порога неустойчивости усло-
вия для реализации одночастичного эффекта Черенко-
ва на первой пространственной гармонике, фактически,
отсутствуют, и неустойчивость может развиваться
лишь в нерезонансном режиме.*

1. При резонансном взаимодействии электронного пучка с плазмой в случае их сильной связи (когда пучок и плазма совмещены в пространстве) в системе развивается неустойчивость в режиме одночастичного вынужденного эффекта Черенкова [1, 5]. Если пучок малой плотности является ультрарелятивистским, а плазма сравнительно плотной, то неустойчивость будет развиваться в длинноволновой области, а возбуждаемая плазменная волна оказывается сильно непотенциальной. Как было показано в [2], с увеличением релятивизма пучка в непосредственной близости от порога неустойчивости происходит интенсивная генерация нерезонансных гармоник плазменной волны, и неустойчивость переходит, фактически, в нерезонансный режим. При этом происходят соответствующие изменения и в динамике частиц. Описанию данных процессов, а именно изучению влияния степени релятивизма пучка на нелинейную динамику электронов пучка вблизи порога неустойчивости, и посвящена настоящая работа.

2. В качестве модели пучково-плазменной системы рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении холодные релятивистский электронный пучок и плазма. Волновод помещен в продольное сильное внешнее магнитное поле,

препятствующее поперечным движениям электронов пучка и плазмы (движение тяжелых ионов вообще не учитываем). И пучок и плазма в начальном состоянии являются моноскоростными.

Эволюция непотенциальных возмущений в такой системе может быть описана с помощью следующей системы уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_n}{d\tau} &= -in \left(\eta'_{0n} \epsilon_n + \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}'_n}}{\sqrt{\alpha_{b1}}} \left(\tilde{\rho}_{bn} - \frac{i}{n} \sqrt{\alpha_{b1}} \sigma \tilde{G}_n \frac{d\tilde{\rho}_{bn}}{d\tau} \right) \right), \quad n = 1; 2; \dots \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} \left(1 - \sigma \sqrt{\alpha_{b1}} \frac{dy}{d\tau} \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha_{b1}}}{2} \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \exp(iny) \frac{\alpha_{bn}}{\alpha_{b1}} \left[\left(1 - \frac{i}{n} \sigma \tilde{\alpha}'_n \tilde{G}_n \frac{d}{d\tau} \right) \tilde{\rho}_{bn} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\tilde{\alpha}'_n} (1 - \sigma \sqrt{\alpha_{b1}} \tilde{G}_n \eta'_{0n}) \epsilon_n - \frac{i}{n} \sigma \sqrt{\tilde{\alpha}'_n} (\tilde{k}_{bn} - \sigma \tilde{\alpha}'_n \tilde{G}_n^2) \frac{d\tilde{\rho}_{bn}}{d\tau} \right] - \text{к.с.} \right\}, \quad (1) \\ \tilde{\rho}_{bn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-iny) dy_0, \end{aligned}$$

$$y|_{\tau=0} = y_0 + a_0 \cos y_0; \quad \left. \frac{dy}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0; \quad \epsilon_n|_{\tau=0} = 0.$$

Здесь определены безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\alpha_{b1}} k_z u t, \quad \epsilon_n = \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}'_n} \tilde{\sigma}_n \omega_p^2}{S_b k_{\perp pn}^2 G_n \omega_b^2} \tilde{\rho}_{pn}, \quad \alpha_{pn} = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp pn}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_{bn} = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp bn}^2 u^2 \gamma^2}, \\ \eta_{0n} &= \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{pn}} \right), \quad \eta'_{0n} = \frac{\eta_{0n}}{\tilde{\sigma}_n \sqrt{\alpha_{b1}}}, \quad \tilde{\alpha}'_n = \frac{\tilde{\alpha}_n}{\sigma \tilde{\sigma}_n}, \quad \tilde{\sigma}_n = \frac{2}{\sigma \alpha_{pn}} + \tilde{k}_{pn}, \quad \sigma = 2 \frac{u^2}{c^2} \gamma^2, \\ \tilde{\alpha}_n &= k_{\perp pn}^2 k_{\perp bn}^2 S_p S_b G_n^2, \quad \tilde{k}_{\alpha n} = 1 + \frac{k_z}{2} \frac{d \ln k_{\perp \alpha n}^{-2}}{dk_z}, \quad G_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp m}^2 + n^2 k_z^2 \gamma^{-2}} \frac{\varphi_m(\vec{r}_b) \varphi_m(\vec{r}_p)}{\|\varphi_m\|^2}, \quad (2) \\ k_{\perp \alpha n}^{-2} &= S_{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp m}^2 + n^2 k_z^2 \gamma^{-2}} \frac{\varphi_m^2(\vec{r}_{\alpha})}{\|\varphi_m\|^2}; \quad \alpha = b, p, \quad \tilde{G}_n = 1 + \frac{k_z}{2} \frac{d \ln G_n}{dk_z}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

где k_z – волновое число начального гармонического возмущения; u – начальная (невозмущенная) скорость электронов пучка; φ_m – собственные функции поперечного сечения волновода (без плазменного и пучкового заполнения), $\|\varphi_m\|$ – их нормы; $k_{\perp m}^2$ – соответствующие данным функциям собственные значения, $\vec{r}_{b,p}$ – координаты электронного пучка и плазмы в поперечном сечении волновода, $S_{b,p}$ – площади их поперечных сечений; $\tilde{\omega}_{\alpha}^2 = S_{\alpha} \omega_{\alpha}^2$, $\alpha = p, b$; ω_{α} – ленгмюровские частоты сорта α .

В уравнениях (1): y – обезразмеренная на k_z координата электрона пучка в системе координат, движущейся со скоростью u ; $\tilde{\rho}_{bn}(t)$ и ϵ_n (или $\tilde{\rho}_{pn}(t)$ – см. (2)) – медленные амплитуды гармоник плотности пучка и плазмы, соответственно; параметр $\sqrt{\alpha_{b1}}\sigma$ (или $\alpha_{b1}\sigma^2$) определяет сильноточность пучка [1, 3] и в данной работе считается малым.

Нужно отметить, что в уравнениях (1) электроны плазмы описываются в линейном приближении, что возможно, если плотность плазмы много больше плотности пучка [1, 5]. Вместе с тем, уравнения (1) отличаются достаточно большой общностью, поскольку были получены с помощью строгой, математически корректной процедуры вывода [2, 4]. В них учитывается генерация гармоник плотности заряда в пучке и плазме, а также непотенциальность плазменной и пучковой волн.

3. В линейном приближении из (1) получается дисперсионное уравнение [2], определяющее различные режимы развития неустойчивости. Подробный анализ этого уравнения был проведен в [3].

В настоящей работе рассматривается случай, когда пучок и плазма совмещены в пространстве ($\vec{r}_b = \vec{r}_p$), и неустойчивость развивается в режиме одночастичного эффекта Черенкова [1, 3]. Известно, что данная неустойчивость, если черенковский резонанс пучка с плазменной волной имеет место на первой пространственной гармонике ($n = 1$), реализуется при выполнении условия резонанса:

$$\omega_p^2 - k_{\perp p1}^2 u^2 \gamma^2 = 0, \quad (3)$$

имеющего в безразмерных обозначениях (2) вид $\eta_{01} = 0$. При этом нужно отметить, что величины $k_{\perp b1}$ и $k_{\perp p1}$, определенные в (2), являются поперечными волновыми числами низкочастотных поверхностных собственных волн E -типа тонких в поперечном сечении волновода пучка и плазмы [1].

Из условия резонанса (3) можно определить пороговое значение γ , при котором черенковская неустойчивость еще имеет место. Считая, что плазма и пучок представляют собой трубки с толщинами $\Delta_p \ll r_p$ и $\Delta_b \ll R_b$ и средними радиусами $r_p < R$ и $r_b < R$ соответственно, воспользовавшись в длинноволновом пределе асимптотическими формулами [1, 4], из (3) будем иметь:

$$\gamma_{\text{порог}} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2} r_p \Delta_p \ln \frac{R}{r_p}}. \quad (4)$$

4. Для исследования зависимости нелинейной динамики электронов пучка от степени его релятивизма проведем численное интегрирование системы уравнений (1) при

различных значениях γ методом крупных частиц. Зафиксируем следующие значения основных параметров:

$$R = 1.8 \text{ см}; r_b = r_p = 0.65 \text{ см}; \Delta_p = \Delta_b = 0.1 \text{ см}; \omega_b = 1 \text{ рад/с}; \omega_p = 50 \text{ рад/с}; a_0 = 10^{-6}. \quad (5)$$

Геометрические факторы, содержащиеся в коэффициентах уравнений (1) (см. обозначения (2)), вычисляем в цилиндрической системе координат по формулам, приведенным, например, в [1, 4]. При этом входящее в них волновое число k_z определяется из условия резонанса (3).

Рассмотрим результаты расчетов.

Пусть вначале $\gamma = 2$. Из (3) имеем волновое число $k_{z \text{ рез}} = 9.41 \text{ см}^{-1}$, при котором осуществляется резонансная черенковская неустойчивость. Вместе с тем, максимум инкремента, вычисленный из дисперсионного уравнения линейной теории, приходится на волновое число $k_{z \text{ max}} = 10.1 \text{ см}^{-1}$ [2]. Данные волновые числа весьма близки, и, следовательно, интенсивней всего должна возбуждаться именно резонансная – первая гармоника плазменной волны. Это и наблюдается на рис. 1, где изображена временная динамика амплитуд первых пяти гармоник плотности: электронов пучка $|\rho_{bn}(\tau)|$ – рис. 1а и плазмы $|\rho_{pn}(\tau)|$ – рис. 1б, соответственно. Из рис. 1б видно подавляющее превосходство первой гармоники плазменной волны, ее высшие гармоники практически не возбуждаются. Из этого же рисунка следует, что максимальная амплитуда плазменной волны ~ 0.01 , что оправдывает использованное в данной работе предположение о линейности плазмы.

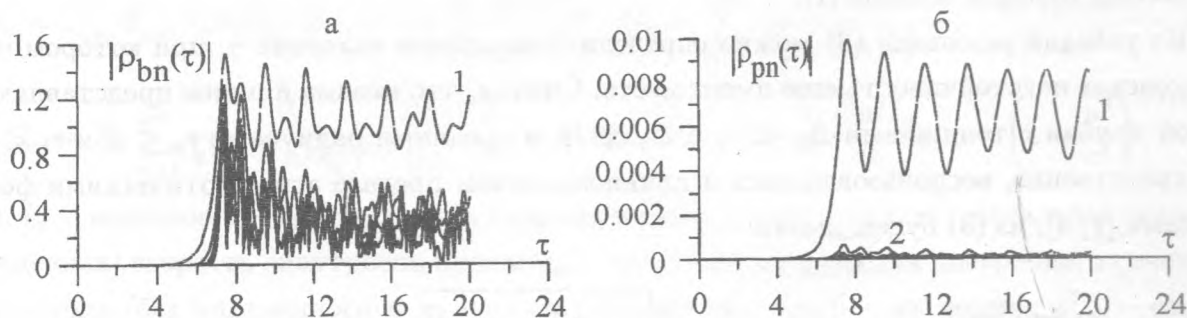


Рис. 1. Зависимости амплитуд волн плотности: а) пучка; б) плазмы от времени без учета генерации высших гармоник плотности в пучке и в плазме. $\gamma = 2$.

На рис. 2а – 2е изображены фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени, указанных на рисунках (по вертикальной оси отложены $\eta_j(\tau) = \dot{y}_j(\tau)$, по горизонтальной – $y_j(\tau)$, где j – номер моделирующей электрон крупной частицы). Приведенные на данных графиках зависимости соответствуют общепринятой теории, описывающей стабилизацию неустойчивости пучка в плазме при одночастичном эффекте Черенкова за счет захвата электронов пучка плазменной волной [1, 5]. А именно, насыщение пучковой неустойчивости обусловлено разбиением пучка на сгустки, торможением сгустков до скорости, равной фазовой скорости резонансной гармоники плазменной волны, захватом сгустков в потенциальных ямах поля этой гармоники. Окончание первого торможения сгустков и есть момент насыщения неустойчивости и момент стабилизации роста амплитуды резонансной гармоники плазменной волны. В дальнейшем захваченные сгустки совершают колебания в потенциальных ямах, то ускоряясь, то тормозясь. При этом, поскольку за одно колебание сгусток дважды сталкивается с потенциальными горбами – один раз с передним, другой раз с задним – осцилляции амплитуды $|\rho_{y1}(\tau)|$ происходят вдвое чаще, чем у $|\rho_{p1}(\tau)|$, что видно из рис. 1.

Как видно из рис. 2, при колебательном движении сгустка между горбами потенциала плазменной волны, которому соответствует вращательное движение электронов на фазовой плоскости, из центральной части сгустка выделяется группа “отстающих” электронов. “Хвост” таких электронов наиболее сильно заметен на рис. 2е. Данная деформация сгустка является следствием генерации высших гармоник плотности электронов пучка, приводящей к “расталкиванию” сгустка, и релятивистского увеличения массы электронов, вследствие чего их гораздо легче затормозить, чем ускорить. В результате образуется “хвост” таких заторможенных электронов, который вращается вместе со сгустком, все более от него отставая. Данные выводы подтверждаются расчетами, в которых в уравнениях (1) учитывалось по одной гармонике пучковой и плазменной волн. При этом отставание электронов было весьма незначительным, и выделение группы заторможенных электронов из целого сгустка становилось заметным лишь после нескольких его колебаний.

Поскольку такая деформация сгустка, вообще говоря, не характерна для явления захвата, изначально описанного в нерелятивистских пучках, ее наличие может быть объяснено, как было отмечено выше, лишь релятивизмом пучка, а именно релятивистским увеличением массы его электронов.

Отмеченные выше закономерности развития неустойчивости продолжают наблюдаться с увеличением степени релятивизма пучка без значительных качественных изме-

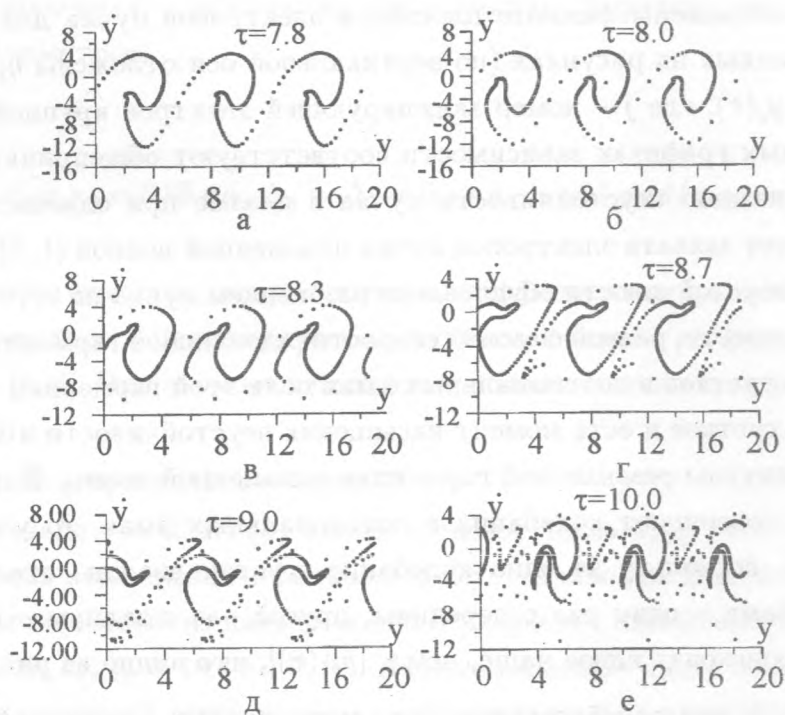


Рис. 2. Фазовые плоскости электронов пучка для моментов времени без учета генерации высших гармоник плотности в пучке и в плазме. $\gamma = 2$.

нений вплоть до $\gamma \sim 4.2$, когда значения γ приближаются к пороговому $\gamma_{\text{порог}} = 4.4035$ (получаемому из (4) с учетом (5)). При дальнейшем увеличении γ начинается интенсивная генерация нерезонансных гармоник плазменной волны, и неустойчивость переходит, фактически, в аperiodический режим [2].

На рис. 3, 4 для $\gamma = 4.26$ изображено то же, что и на рис. 1, 2. В данном случае из (3) имеем $k_{z \text{ рез}} = 1.67 \text{ см}^{-1}$. Максимум же инкремента, вычисленный из дисперсионного уравнения линейной теории [2], приходится на $k_{z \text{ max}} = 3.46 \text{ см}^{-1}$, что весьма близко к волновому числу второй гармоники (для нее $k_z = 3.34 \text{ см}^{-1}$). Вследствие этого на рис. 3б мы наблюдаем значительное доминирование второй гармоники плазменных колебаний. Первая же гармоника вначале (на линейной стадии развития неустойчивости) растет почти также как и вторая, но затем, на стадии после насыщения неустойчивости, ее амплитуда падает почти до нуля. Большие амплитуды третьей и четвертой гармоник, достигаемые ими на стадии насыщения неустойчивости, хотя в соответствии с линейной теорией они возбуждаться еще не должны [2], можно объяснить влиянием

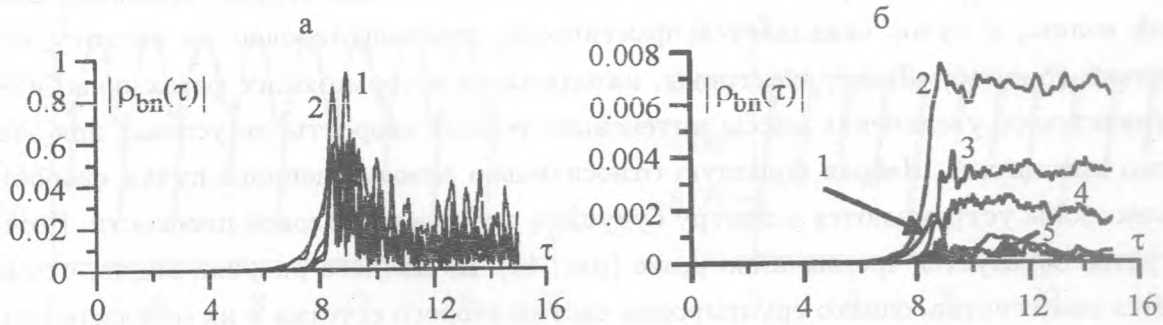


Рис. 3. Зависимости амплитуд волн плотности: а) пучка; б) плазмы от времени при учете генерации высших гармоник плотности в пучке и в плазме. $\gamma = 4.26$.

соответствующих гармоник пучковой волны. Как видно из рис. 3а, в отличие от рис. 1а, все их амплитуды на стадии после насыщения неустойчивости практически одинаковы.

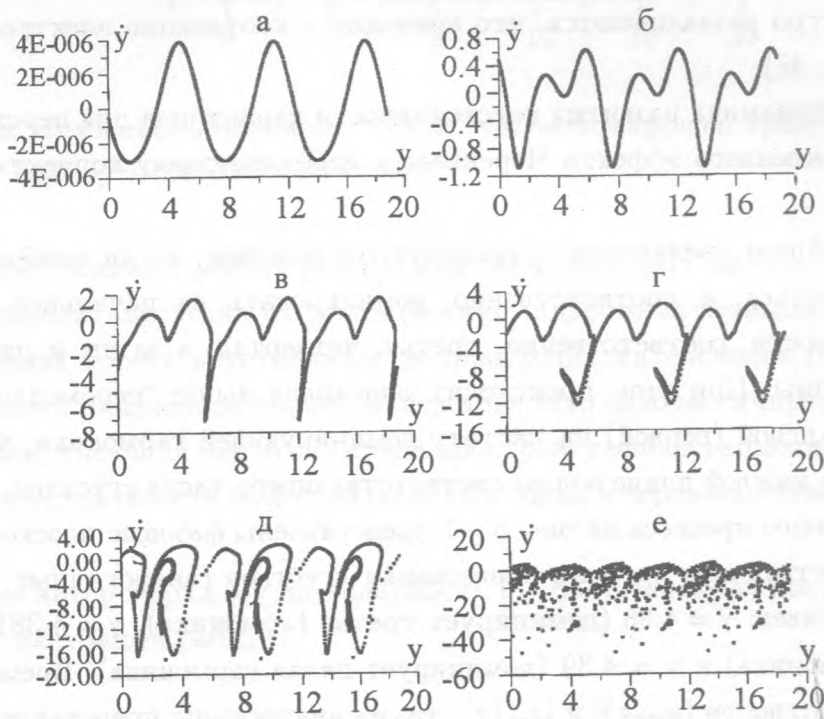


Рис. 4. Фазовые плоскости электронов пучка для 6 моментов времени при учете генерации высших гармоник плотности в пучке и в плазме. $\gamma = 4.26$.

Из анализа фазовых плоскостей, представленных на рис. 4, видно, что вначале пучок был промодулирован на частоте первой (резонансной) гармоники (рис. 4а). Затем,

еще на линейной стадии, происходит интенсивное возбуждение второй гармоники плазменной волны, и пучок оказывается, фактически, перемодулирован на частоту этой гармоники (рис. 4б). Далее, электроны, находящиеся в тормозящих фазах поля, из-за релятивистского увеличения массы интенсивно теряют скорость, не успевая при этом заметно сместиться. Набрав большую относительно невозмущенного пучка скорость, эти электроны устремляются к центру будущего сгустка на фазовой плоскости. Поэтому сгусток образуется чрезвычайно резко (рис. 4в). Из данного рисунка видно, что появляется два сгустка, однако группировка частиц второго сгустка и их относительные скорости пока незначительны. Затем у части электронов, попавших в ускоряющую фазу поля, торможение замедляется, хотя у остальной части сгустка это торможение еще значительно (рис. 4г). Когда амплитуда второй гармоники достигает своего максимума, на каждой длине волны появляется второй сгусток, примерно такой же по величине, как и первый (рис. 4д). В дальнейшем электроны, образовавшие сгустки, имея большие относительные скорости, пролетают центры сгустков и сгустки, не совершив ни одного колебания, быстро разваливаются, что приводит к хаотизации электронов на фазовой плоскости (рис. 4е).

Описанная динамика развития неустойчивости характерна для перехода от одночастичного вынужденного эффекта Черенкова к нерезонансному коллективному режиму [5, 6].

При дальнейшем увеличении γ реализуются режимы, когда наиболее интенсивно будут возбуждаться, и, соответственно, доминировать на начальной стадии развития неустойчивости, соответственно, третья, четвертая, а затем и пятая гармоники плазменной волны. При этом происходит описанная выше “перемодуляция” пучка с частоты резонансной (первой) на частоту доминирующей гармоники, что приводит к образованию на каждой длине волны соответствующего числа сгустков. В качестве иллюстрации данного процесса на рис. 5 – 7 представлены фазовые плоскости электронов пучка, соответствующие времени образования сгустков (аналогичные рис. 4в), полученные для случаев: $\gamma = 4.36$ (доминирует третья гармоника), $\gamma = 4.3817$ (доминирует четвертая гармоника) и $\gamma = 4.39$ (доминирует пятая гармоника). Временные динамики гармоник плотности $|\rho_{bn}(\tau)|$ и $|\rho_{pn}(\tau)|$ также аналогичны представленным на рис. 3 (доминирует только, в отличие от рис. 3б, не вторая, а третья, четвертая или пятая гармоники плазменной волны), и поэтому для краткости изложения эти зависимости не приводятся.

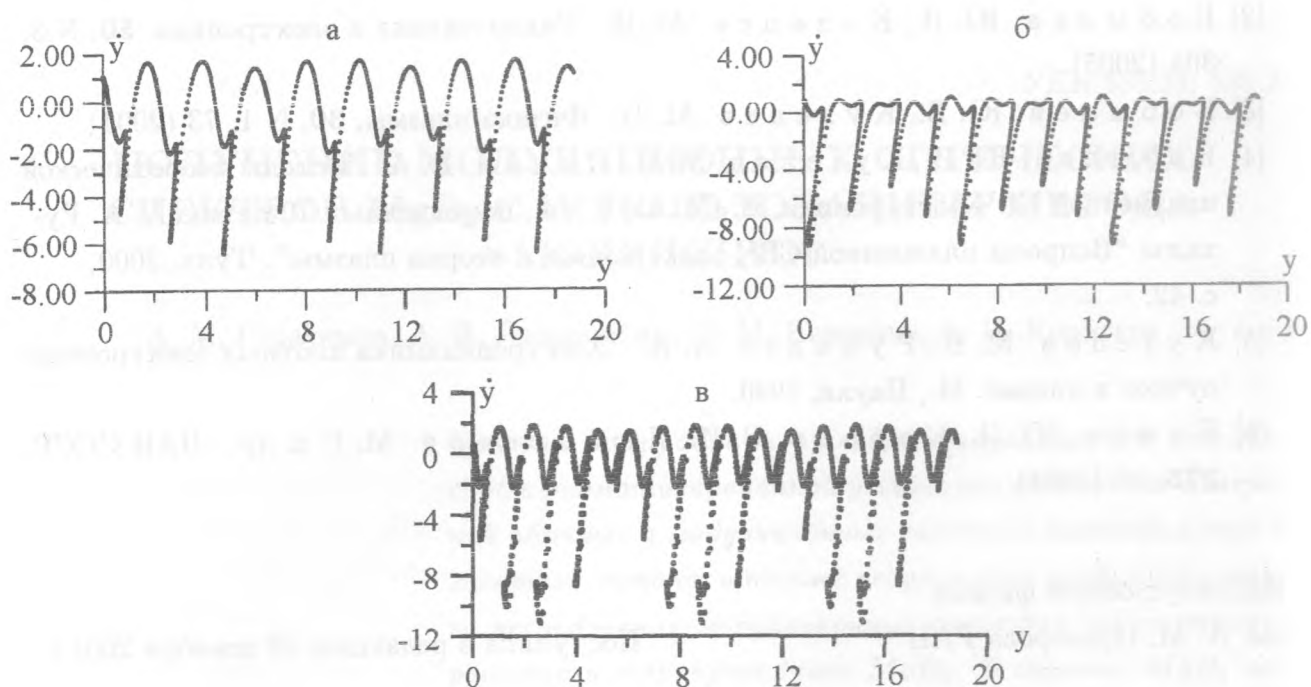


Рис. 5. Фазовые плоскости электронов пучка, соответствующие времени образования сгустков. а) $\gamma = 4.36$, б) $\gamma = 4.3817$, в) $\gamma = 4.39$.

Резюмируя полученные в работе результаты, можно сделать вывод о том, что в слабоботочных ультрарелятивистских пучках в режиме сильного их взаимодействия с плотной плазмой вблизи порога неустойчивости происходит интенсивная генерация нерезонансных гармоник плазменной волны. Вследствие чего одночастичный вынужденный эффект Черенкова, имеющий место на первой пространственной гармонике, фактически отсутствует, и неустойчивость может развиваться лишь в нерезонансном коллективном режиме.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Кузелеву за постоянное внимание и интерес к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ электроника. М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002, с. 544.

- [2] Б о б ы л е в Ю. В., К у з е л е в М. В. Радиотехника и электроника, **50**, N 3, 304 (2005).
- [3] Б о б ы л е в Ю. В., К у з е л е в М. В. Физика плазмы, **30**, N 1, 73 (2004).
- [4] Б о б ы л е в Ю. В., К у з е л е в М. В., П а н и н В. А. Методы теоретической плазменной СВЧ-электроники. В: Сб. науч. тр., посвященный 70-летию А. А. Рухадзе "Вопросы плазменной СВЧ-электроники и теории плазмы". Тула, 2000, с. 42.
- [5] К у з е л е в М. В., Р у х а д з е А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., Наука, 1990.
- [6] Б л и о х Ю. П., К а р а с ь В. И., Л ю б а р с к и й М. Г. и др. ДАН СССР, **275**, 56 (1984).

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 20 декабря 2004 г.