

УДК 551.466

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА МОРСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

М. А. Шерменева, И. В. Шуган

Построена нелинейная нестационарная модель взаимодействия гравитационных поверхностных волн с длинной внутренней волной. Задача актуальна для судоходства, так как изучается влияние подводных течений на морскую поверхность. Рассматривается приближение второго порядка по крутизне волны и изучается динамика первоначально однородных гравитационных поверхностных волн на течении, индуцированном внутренней волной. Показано, что в результате взаимодействия возникают три возмущения на поверхности: одно из них стационарно, в то время как другие два могут быть предвестниками либо следами внутренней волны.

Происхождение внутренних волн связано с вызываемой наличием поля тяжести неоднородностью жидкости: ее давление (а с ним и энтропия) непременно будет меняться с высотой; поэтому всякое смещение какого-либо участка жидкости по высоте приведет к нарушению механического равновесия, а потому к возникновению колебательного движения. Большинство работ по этой теме посвящены изучению линейных модуляций ветровых волн на течении, то есть рассматривается приближение Стокса первого порядка уравнений волнового движения по степени крутизны волны ak (a и k суть характерные амплитуда волны и волновое число). Предположение об установившемся характере взаимодействия приводит к условию постоянства частоты волны ($\omega = \text{const}$), которое соответствует стационарной модели взаимодействия волны с течением. Филиппс [1] рассмотрел стационарный линейный одномерный случай, показав, что амплитуда поверхностной волны зависит от фазы внутренней волны, но решение становится некорректным в окрестности точек, где линейная групповая скорость c_g поверхностных

волн близка к фазовой скорости c внутренней волны. Холлидей [2] и Смит [3] пытались избавиться от сингулярности и рассмотрели нелинейную стационарную модель. Однако им удалось лишь слегка подвинуть резонансные условия. Позднее регулярные нелинейные стационарные решения были предложены в [4, 5]. Российскими учеными также открыто много новых свойств волнового взаимодействия, в частности существование предвестника внутренней волны и уменьшение периода пакета поверхностных волн в зоне периодических коротких внутренних волн [6 – 8]. Кинематика волновых пакетов была проанализирована более детально в [9 – 12].

Нами рассматривается нелинейная нестационарная модель взаимодействия поверхностных волн с внутренней волной, которая представляется в виде слабого приповерхностного течения.

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную задачу Коши для поверхностных гравитационных волн с волновым числом k и частотой ω на неоднородном поверхностном течении со скоростью $U(x)$ в бесконечно глубокой жидкости. Волны распространяются, подчиняясь закону сохранения фазы (нижние индексы соответствуют частным производным)

$$k_t + \omega_x = 0, \quad (1)$$

и уравнению сохранения волнового действия

$$\left(\frac{a^2}{k^{1/2}} \right)_t + \left[\frac{a^2}{k^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{2k^{1/2}} + v(x) \right) \right]_x = 0, \quad (2)$$

$$v(x) = -c + \varepsilon U(x). \quad (3)$$

Начальные условия можно записать как:

$$k(x, 0) = k_0 = \text{const},$$

$$a(x, 0) = a_0 = \text{const}, \quad (4)$$

где a – амплитуда волн, $\alpha = g^{1/2}$, g – ускорение силы тяжести. Ключевым элементом анализа является учет так называемой амплитудной дисперсии волн на слабом поверхностном течении. В этом случае дисперсионное соотношение записывается в виде:

$$\omega = \alpha^{1/2} k^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 k^2 \right) + kv(x), \quad (5)$$

где c – фазовая скорость внутренней волны в системе координат, связанной с ней, $U(x)$ – скорость подводного течения. Экспериментально показано [13], что скорость течения мала по сравнению со скоростью внутренней волны и это позволяет ввести малый параметр $\varepsilon = U(x)/c$.

Преобразование основных уравнений. Вводя новые переменные

$$\Omega = k^{1/2}, \quad A = \frac{a^2}{k^{1/2}}, \quad (6)$$

физический смысл которых есть приведенная частота волн и волновое действие, и дифференцируя дисперсионное соотношение (5), преобразованное в

$$\omega = \alpha^{1/2} \Omega \left(1 + \frac{1}{2} A \Omega^5 \right) + \Omega^2 [-c + \varepsilon U(x)], \quad (7)$$

разложим функции Ω и A по степеням малого параметра ε :

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \varepsilon + \Omega_2 \varepsilon^2 + \dots + \Omega_m \varepsilon^m + \dots, \quad (8)$$

$$A = A_0 + A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + \dots + A_m \varepsilon^m + \dots, \quad (9)$$

где Ω_i , A_i – неизвестные функции координаты и времени. Перепишем пару (1, 2) в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений

$$\Omega_{1t} + a_{11} \Omega_{1x} + a_{12} A_{1x} + \frac{\varepsilon}{2} \Omega_0 U'(x) = 0, \quad (10)$$

$$A_{1t} + a_{21} \Omega_{1x} + a_{22} A_{1x} + \varepsilon A_0 U'(x) = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты определяются из разложения

$$a_{ij} = a_{ij}^0(A_0, \Omega_0) + a_{ij}^1(A_0, \Omega_0, A_1, \Omega_1) \varepsilon + \dots + a_{ij}^m(A_0, \Omega_0, \dots, A_m, \Omega_m) \varepsilon^m + \dots \quad (12)$$

Функции нулевого порядка (в отсутствие течения) $\Omega_0(x, t)$ и $A_0(x, t)$ постоянны и, следовательно, коэффициенты a_{ij}^0 тоже постоянны. Их можно явно выразить следующим образом:

$$a_{11}^0 = \frac{\alpha}{2} \Omega_0^{-1} + \frac{3\alpha}{2} A_0 \Omega_0^4 - c, \quad (12)$$

$$a_{12}^0 = \frac{\alpha}{4} \Omega_0^5, \quad (13)$$

$$a_{21}^0 = -\frac{\alpha}{2} \Omega_0^{-2} A_0, \quad (14)$$

$$a_{22}^0 = \frac{\alpha}{2} \Omega_0^{-1} - c. \quad (15)$$

Пусть λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы a_{ij}^0 ; (характеристические скорости решения системы (10, 11)), (l_1^1, l_2^1) и (l_1^2, l_2^2) – ее левые собственные вектора. Их можно выбрать так, что $l_i^i = 1$ и переобозначить $(1, L^1)$ и $(1, L^2)$.

Можно показать, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \Omega_0^{-1} + \frac{3\alpha \Omega_0^4 A_0}{4} - c \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}, \quad (16)$$

$$\Delta = \frac{9\alpha^2}{4} \Omega_0^8 A_0^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Omega_0^3 A_0. \quad (17)$$

Введем новые независимые переменные

$$x_1 = \frac{x - \lambda_2 t}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad x_2 = -\frac{x - \lambda_1 t}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (18)$$

Решение первого порядка. Умножая (10, 11) на L^i ($i = 1, 2$) и суммируя с (16), находим в первом порядке по ε

$$\Omega_{1t} + L^i A_{1t} + (a_{11}^0 + L^i a_{21}^0) \Omega_{1x} + (a_{12}^0 + L^i a_{22}^0) A_{1x} = -L^i A_0 U'(x) - \frac{1}{2} \Omega_0 U'(x). \quad (19)$$

Из (19) следует система

$$(\Omega_1 + L^i A_1)_{x_i} = -L^i A_0 U'(x) - \frac{1}{2} \Omega_0 U'(x). \quad (20)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем систему:

$$\Omega_1 + L^1 A_1 = \frac{1}{\lambda_1} \left(-L^1 A_0 - \frac{1}{2} \Omega_0 \right) [U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - U((\lambda_2 - \lambda_1) x_2)], \quad (21)$$

$$\Omega_1 + L^2 A_1 = \frac{1}{\lambda_2} \left(-L^2 A_0 - \frac{1}{2} \Omega_0 \right) [U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - U((\lambda_1 - \lambda_2) x_1)]. \quad (22)$$

Введем новые обозначения для константы

$$\alpha_i = -L^i A_0 - \frac{1}{2} \Omega_0. \quad (23)$$

Возвращаясь к исходным независимым переменным x и t , находим решение первого порядка в виде:

$$\Omega_1 = \frac{1}{(L^2 - L^1)} \left[\left(\frac{\alpha_1 L^2}{2\lambda_1} - \frac{\alpha_2 L^1}{2\lambda_2} \right) U(x) - \frac{\alpha_1 L^2}{2\lambda_1} U(x - \lambda_1 t) + \frac{\alpha_2 L^1}{2\lambda_2} U(x - \lambda_2 t) \right], \quad (24)$$

$$A_1 = \frac{1}{(L^1 - L^2)} \left[\left(\frac{\alpha_1}{2\lambda_1} - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2} \right) U(x) - \frac{\alpha_1 L^2}{2\lambda_1} U(x - \lambda_1 t) + \frac{\alpha_2 L^1}{2\lambda_2} U(x - \lambda_2 t) \right]. \quad (25)$$

Следовательно, возмущения волнового действия и частоты поверхностных гравитационных волн с заданными начальными значениями, индуцированные мгновенно возникающим слабым неоднородным течением, в общем виде представлены в первом порядке тремя возмущениями, подобными по форме самому течению: первое непосредственно связано с течением, в то время как другие два распространяются со своими собственными скоростями λ_1 и λ_2 . Знаки этих возмущений полностью определяются знаками λ_1 и λ_2 .

Типы решений. Как мы уже говорили, поведение функций Ω_1 и A_1 зависит от характеристикских скоростей λ_1 и λ_2 движущихся возмущений. Если эти скорости действительны, тогда Ω_1 и A_1 являются регулярными ограниченными функциями от пространственной координаты x и времени t . Если же они комплексны, то мы имеем только два возмущения вместо трех. Одно из них – установившееся и ограниченное, в то время как другое (в зависимости от вида течения) удаляется от внутренней волны и его амплитуда может возрасти во времени.

Разобьем положительный ортант плоскости (Ω_0, A_0) (ту четверть плоскости, где $\Omega_0 > 0$ и $A_0 > 0$) на области действительных \mathbf{R} и комплексных \mathbf{C} собственных скоростей, в которых λ_1 и λ_2 действительны или комплексны соответственно (рис. 1). Граница этих областей определяется уравнением

$$A_0 = \frac{2}{9\Omega_0^5}. \quad (26)$$

Из условия $a^2 k^2 = 1$ следует, что $A_0 \Omega_0^5 = 1$, откуда видно, что наибольший интерес представляет именно область комплексных собственных значений \mathbf{C} .

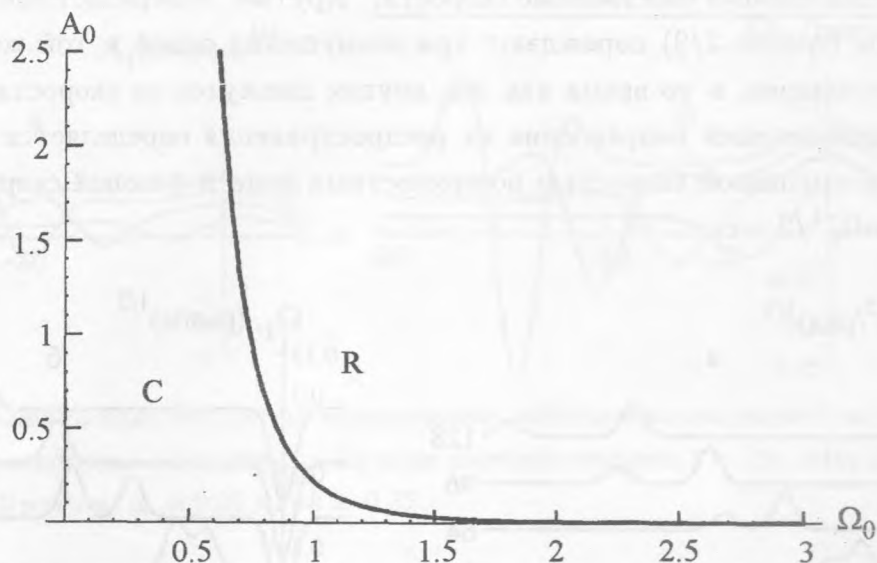


Рис. 1. Разбиение положительного ортанта (Ω_0, A_0) -плоскости на области **R** действительных и **C** комплексных собственных скоростей.

В области **R**, когда поверхностные волны достаточно коротки и выполняется условие

$$c > c_g + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \quad (27)$$

где c_g – групповая скорость поверхностных волн, оба возмущения движутся влево от внутренней волны, являясь, таким образом, ее следами. При

$$c_g - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} < c < c_g + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad (28)$$

волны возмущения будут распространяться по разные стороны от внутренней волны. Если

$$c < c_g - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \quad (29)$$

то обе волны будут распространяться вправо от течения (т.е. будут предвестниками).

Примеры эволюции волн. Рассмотрим случай течения с гауссовым профилем:

$$U(x) = \exp(-Bx^2), \quad (30)$$

где B – константа. В нижеприведенных примерах $B^{1/2} = 0.11$ (1/м). Теперь рассмотрим конкретные примеры эволюции волн.

Действительные собственные скорости. Крутые поверхностные волны (квадрат крутизны больше $2/9$) порождают три возмущения одной и той же формы. Одно из них стационарно, в то время как два других движутся со скоростями λ_1 и λ_2 . В нулевом приближении направление их распространения определяется разностью между линейной групповой скоростью поверхностных волн и фазовой скоростью внутренней волны: $\alpha\Omega_0^{-1}/2 - c$.

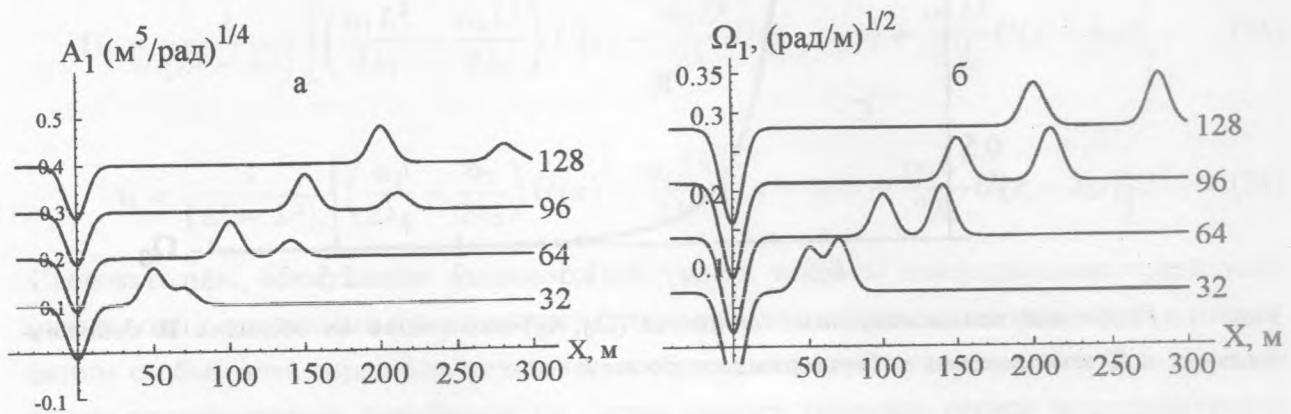


Рис. 2. Эволюция волн для случая действительных собственных скоростей: а) волновое действие A_1 , б) приведенная частота Ω_1 . Четыре кривые соответствуют моментам времени $t = 32$ с, 64 с, 96 с и 128 с. $c = 0.5$ м/с, $k_0 = 0.86$ рад/м, $a_0 = 0.61$ м, $ak = 0.53$.

Если $\lambda_{1,2} > 0$, то обе волны возмущения движутся вправо от внутренней волны (являются предвестниками). Этот случай представлен на рис. 2 для параметров $\Omega_0^2 = 0.86$ рад/м, $(A_0\Omega_0)^{1/2} = 0.61$ м и $c = 0.5$ м/с. Крутизна волны $ak = 0.53$. График волнового действия показан на рис. 2а, а частоты на рис. 2б. Из формулы (16) видно, что собственные скорости положительны, если фазовая скорость внутренней волны достаточно мала.

Комплексные собственные скорости. В комплексном случае действительная часть α скоростей $\lambda_{1,2}$ представляет собой скорость двух связанных между собой возмущений. Таким образом, вместо трех возмущений мы имеем только два. Кроме того, амплитуда движущегося возмущения растет во времени. Решения первого порядка Ω_1 и A_1 показаны на рис. 3 для начальных данных $\Omega_0^2 = 1.0$ рад/м, $(A_0\Omega_0)^{1/2} = 0.32$ м и $c = 3.0$ м/с. Крутизна волн ak составляет 0.32.

В настоящей работе найдено нестационарное решение для взаимодействия гравитационных поверхностных волн с внутренней волной.

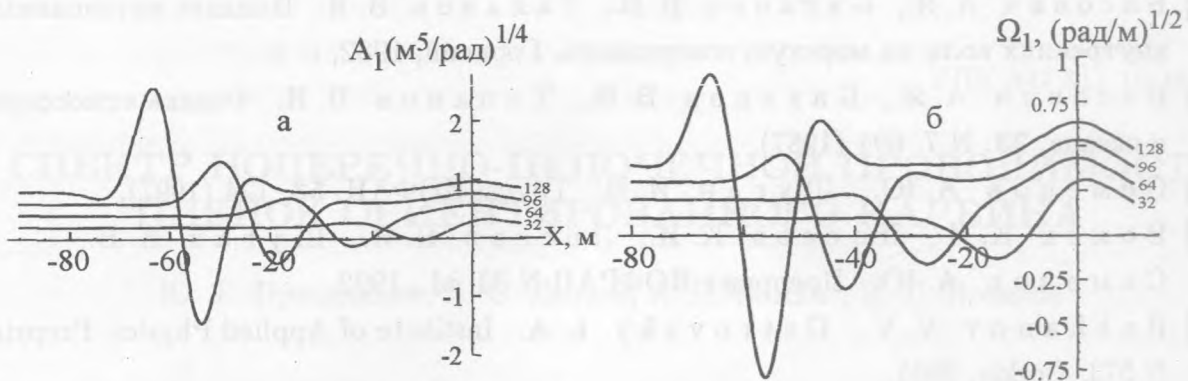


Рис. 3. Пример эволюции волн для случая комплексных собственных скоростей: а) волновое действие A_1 , б) приведенная частота Ω_1 . Кривые соответствуют $t = 12\text{ с}$, 24 с , 36 с и 48 с . $c = 0.3\text{ м/с}$, $k_0 = 1.0\text{ рад/м}$, $a_0 = 0.32\text{ м}$, $ak = 0.32$.

В случае крутых поверхностных волн возникает три волновых пакета: один из них связан с внутренней волной, в то время как два других могут быть предвестниками или следами внутренней волны в зависимости от соотношения между групповой скоростью c_g поверхностных волн и фазовой скоростью c внутренней волны.

В случае некрутых поверхностных волн также возникает движущееся возмущение, связанное с внутренней волной, а также один нелинейный движущийся (относительно внутренней волны) волновой пакет, амплитуда которого увеличивается во времени. Если групповая скорость больше фазовой скорости внутренней волны, то движущееся возмущение является предвестником внутренней волны. В противном случае оно является его следом.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Phillips O. M. The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge: Univ. Press, 1966.
- [2] Holliday D. J. Fluid Mech., **57**, 797 (1973).
- [3] Smith R. J. Fluid Mech., **77**, 417 (1976).
- [4] Gerber M. J. Fluid Mech., **176**, 311 (1987).
- [5] Shugan I. V. and Voliak K. I. Phys. Vibr., **8**, N 2, 79 (2000).
- [6] Басович А. Я. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, **15**, N 6, 655 (1979).

- [7] Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. Влияние интенсивных внутренних волн на морскую поверхность. Горький, 1982, с. 8.
- [8] Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. Физика атмосферы и океана, **23**, N 7, 694 (1987).
- [9] Семенов А. Ю., Шуган И. В. Труды ИОФАН, **53**, 124 (1997).
- [10] Воляк К. И., Лоссов К. И., Лоссов Н. И., Шуган И. В., Семенов А. Ю. Препринт ИОФРАН N 33, М., 1992.
- [11] Vakhanov V. V., Ostrovsky L. A. Institute of Applied Physics. Preprint N 573, Gorkiy, 2001.
- [12] Воляк К. И., Шерменев А. М. Труды ИОФАН, **56**, 52 (1999).
- [13] Huges B., Grant H. J. Geophys. Res., **83C**, N 1, 443 (1978).

ИЦВИ Института общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 18 сентября 2005 г.