УДК 535.32

ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА–ВИХЕРТА ДЛЯ МОДЕЛИ РАСШИРЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Д. Ю. Ципенюк, В. А. Андреев

В расширенном (1+4)-мерном пространстве $G(T;\vec{X},S)$ рассматривается модель, объединяющая электромагнитное и гравитационное поля. Для уравнений, описывающих эти поля, найдены точные решения, отвечающие точечным движущимся источникам. Такие решения выражаются через потенциалы Лиенара–Вихерта в пространстве $G(T;\vec{X},S)$. Проанализированы их свойства.

В работах [1, 2] была предложена модель, являющаяся обобщением специальной теории относительности Эйнштейна (СТО) на 5-мерное расширенное пространство $G(T;\vec{X},S)$ с метрикой

$$(+,-,-,-,-).$$

В рамках этой модели расширенного пространства (МРП) рассматривалась возможность объединения гравитации и электромагнетизма в одно единое поле. Различные детали, относящиеся к структуре МРП, содержатся в работах [3 – 7]. Был поставлен эксперимент по проверке предсказаний МРП [8, 9]. Для его количественного анализа необходимо знать точные решения уравнений поля, которые были сформулированы в [1]. В данной работе найдены решения, отвечающие точечным источникам.

Главное отличие МРП от СТО состоит в том, что МРП позволяет изучать процессы, при которых меняется масса частицы m. Под массой частицы m, следуя рекомендациям обзора [10], будем понимать ее массу покоя, которая является лоренцевским скаляром. В нашей модели масса частицы – компонента 5-вектора в пространстве $G(T;\vec{X},S)$, другими компонентами которого служат ее энергия и импульс. Таким образом, масса частицы меняется при преобразованиях в пространстве $G(T;\vec{X},S)$. Что касается ее заряда, то предполагается, что он остается постоянным. Мы исходим также из того, что заряд e всегда связан с некоторой массой m и сопоставляем заряженной частице параметр me. Поскольку заряд e – скаляр в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$, параметр me – компонента вектора в этом пространстве. В качестве 5-й дополнительной координаты используется та величина, которая уже существует в пространстве Минковского, а именно, интервал s:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{1}$$

Эта величина сохраняется при обычных преобразованиях Лоренца в пространстве Минковского $M(T;\vec{X})$, но меняется при поворотах в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$. Таким образом, пространство Минковского $M(T;\vec{X})$ – это конус в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$. 5-вектора в пространстве $G(T;\vec{X},S)$ будем обозначать черточкой $(\bar{r})$, вектора в 4-мерном евклидовом пространстве с координатами (x,y,z,s) и вектора в его 3-мерных подпространствах обозначаются стрелочкой сверху и цифрой внизу, указывающей размерность пространства, к которому относится этот вектор: $(\vec{v}_{(3)},\vec{v}_{(4)})$. Как правило, из контекста бывает понятно, о каком 3-мерном подпространстве идет речь и его данные в номенклатуре вектора мы не указываем.

В работе [1] было показано, что единое поле, объединяющее гравитацию и электромагнетизм, порождается током, который в случае одной частицы является изотропным 5-вектором

$$\bar{J} = (j_t,\vec{j},j_s) = \left(\frac{qc}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{q\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}},qc\right), \tag{2}$$

где

$$\beta^2 = v_{(3)}^2/c^2;\ q = me;\ q\vec{u} = me\vec{u}(t,x,y,z). \tag{3}$$

Если имеется несколько частиц, то их общий ток есть сумма токов отдельных частиц. Дополнительные преобразования, которые имеются в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$, меняют величину q аналогично тому, как они меняют массу покоя m [1 – 3].

В [1] была построена расширенная система уравнений Максвелла, описывающая это поле. Как и в случае обычной электродинамики, его напряженности выражаются через компоненты 5-вектор-потенциала

$$(\varphi,\vec{A},A_s) = (A_t,A_x,A_y,A_z,A_s). \tag{4}$$

Потенциал (4) и ток (2) связаны уравнениями

$$\diamond A_t = -\frac{4\pi}{c} j_t, \tag{5}$$

$$\diamond \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \tag{6}$$

$$\diamond A_s = -\frac{4\pi}{c} j_s. \tag{7}$$

Здесь

$$\diamond = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Для того, чтобы получить из системы (5) – (7) обычную систему уравнений для вектор-потенциала, которая используется в электродинамике, надо учесть, что масса m – скаляр относительно преобразований Лоренца, поделить каждое из уравнений (5), (6) на эту массу m, а уравнение (7) на заряд e, а также учесть то, что теперь все величины не зависят от переменной s. Тогда оператор (8) превращается в обычный даламбертиан. После этого система (5) – (7) распадется на систему уравнений для потенциалов обычной классической электродинамики и уравнение для гравитационного поля, которое является скаляром по отношению к преобразованиям Лоренца. Эти системы уравнений имеют вид:

$$\Box A_t = -4\pi\rho, \tag{9}$$

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{\rho}, \tag{10}$$

$$\Box A_s = -\frac{4\pi}{c} \rho_s. \tag{11}$$

В правых частях уравнений (9) – (11) стоят компоненты тока

$$\rho = \left(\frac{ec}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{e\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, mc \right). \tag{12}$$

Уравнения (9), (10) описывают электромагнитное поле движущегося точечного заряда, а уравнение (11) – скалярный потенциал гравитационного поля. Таким образом, в случае, когда масса постоянна, т.е. нет зависимости от пятой координаты s, гравитационное и электромагнитное поля можно рассматривать по отдельности, разделяя уравнения (9), (10) и (11). Если же такая зависимость имеет место, то их надо рассматривать как единое поле.

При рассмотрении любой системы уравнений большое значение имеет нахождение ее точных решений. Прежде всего, сам факт существования такого нетривиального решения указывает на совместность такой системы, ее содержательность и внутреннюю непротиворечивость. Изучая структуру точного решения, можно обнаружить такие свойства и закономерности, которые не видны, если исходить из самой системы. Особенно важны точные решения уравнений, описывающих какое-либо физическое явление. Такое решение фактически дает нам модель процесса, динамика которого известна во всех деталях. Для системы уравнений Максвелла важнейшую роль играет решение, называемое потенциалами Лиенара–Вихерта. Это решение дает явный вид электромагнитного поля, которое создает заряд, движущийся произвольным, но вполне определенным образом. Закон движения заряда является внешним условием, определяющим структуру решения. В данном разделе построим потенциалы Лиенара–Вихерта для системы (5) – (7). По своей формальной структуре они имеют вид запаздывающих потенциалов.

Идея построения запаздывающих потенциалов основывается на том, что величина напряженности поля, создаваемого движущимся зарядом в точке (x, y, z) в момент времени t, задается положением заряда в некоторый предыдущий момент времени $t' < t$. В обычной электродинамике расстояние между источником поля и точкой наблюдения – это расстояние в 3-мерном евклидовом пространстве. В нашей модели двум точкам в расширенном пространстве $G(T; \vec{X}, S)$ сопоставляется 4-мерный пространственный интервал

$$R_{(4)}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + (s - s')^2, \qquad (13)$$

являющийся частью полного интервала (1).

Обсудим вопрос о том, какие параметры следует подставлять в формулу (13) при вычислении потенциалов Лиенара–Вихерта.

Пространственные координаты (x, y, z), (x', y', z') определяют соответственно положение точки, в которой измеряют напряженность поля в момент времени t, и положение заряда в момент времени t'.

В работах [1 – 3] было показано, что пятую координату s можно связать с показателем преломления n. В соответствии с этим расстояние по 5-й координате $(s - s')^2$ определим следующим образом. Если частица движется в пустом пространстве и при распространении ее поля ему не приходится пересекать участки с $n > 1$, то в (13) $(s - s') = 0$. Если же такие участки встречаются, т.е. отрезок, соединяющий заряд с точкой наблюдения, лежит в 4-мерном евклидовом пространстве, то пространственный интервал имеет вид (13). При этом величина компоненты $(s-s') = R_s$ зависит не от значения показателя преломления в этих точках, а от его значения во всех точках пути, их соединяющего. Отметим, что этот путь может и не быть прямолинейным отрезком, его геометрия зависит от распределения коэффициента преломления $n(x,y,z)$. Пусть точка наблюдения поля и его источник находятся друг от друга на 3-мерном расстоянии

$$R_{(3)}^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \tag{14}$$

и свет проходит это расстояние за время Δt, тогда по определению интервала

$$(s-s')^2 = c^2(\Delta t)^2 - R_{(3)}^2 = R_s^2. \tag{15}$$

В этом выражении s и s' не являются значениями параметра s в точке наблюдения поля и в точке – его источнике. Поскольку разность $(s-s')$ характеризует весь отрезок, соединяющий источник с точкой наблюдения, мы будем использовать в дальнейшем для него обозначение R_s. В этих обозначениях скорость заряда по переменной s есть u_s, а его ускорение $\dot{u}_s$. При этом скорость v_s распространения света вдоль координаты s определяется с помощью соотношения

$$v_s^2 = c^2 - \frac{R_{(3)}^2}{(\Delta t)^2}. \tag{16}$$

Для определения 4-мерного расстояния $R_{(4)}$ надо величину (15) подставить в формулу (13). 4-мерное расстояние $R_{(4)}$, скорость света c, 3-мерное расстояние $R_{(3)}$ и скорость света в среде v связаны друг с другом соотношением

$$\frac{R_{(3)}}{v} = \frac{R_{(4)}}{c} \tag{17}$$

или

$$R_{(3)}n = R_{(4)},$$

где n – показатель преломления среды.

Связь момента испускания поля t' с моментом его наблюдения t определяется с помощью соотношения

$$t' + \frac{R_{(4)}(t')}{c} = t, \tag{18}$$

которое имеет тот же вид, что и аналогичное соотношение в обычной электродинамике, с той лишь разницей, что вместо 3-мерного расстояния в нем стоит 4-мерное. Выражение (18) является уравнением на время испускания t', выражающим его через время наблюдения t. В пустоте оно имеет только одно решение [11], однако известно, что в среде это не так и оно может иметь несколько решений [12], далее обсудим этот вопрос подробнее.

Перейдем к непосредственному построению потенциалов Лиенара–Вихерта. Для этого, как и в обычном случае, сначала запишем потенциалы неподвижной заряженной частицы, а затем перепишем их в форме, инвариантной относительно преобразований в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$.

Итак, пусть имеется точечная частица с зарядом e и массой m. Ей отвечает 5-вектор тока

$$\bar{J} = em\bar{\delta}(\bar{r}-\bar{r}')\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}, c\right). \tag{19}$$

Подставляя эти значения компонент тока в правые части уравнений (5) – (7), получим, что при нулевой скорости частицы ($\vec{u}=0$) потенциалы имеют вид:

$$A_t = \varphi = \frac{em}{R_{(4)}(t')},\ \vec{A}=0,\ A_s = \frac{em}{R_{(4)}(t')}. \tag{20}$$

Здесь $R_{(4)}(t')$ – расстояние в 4-мерном пространстве от источника поля до точки наблюдения. Используя (18), выражения для потенциалов можно записать в виде

$$A_t = \varphi = \frac{em}{c(t-t')},\ \vec{A}=0,\ A_s = \frac{em}{c(t-t')}. \tag{21}$$

Поскольку потенциал – это вектор в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$, выражение (21) легко обобщается на случай движущихся частиц:

$$\bar{A} = \frac{em\bar{u}}{(\bar{R},\bar{u})}. \tag{22}$$

Здесь $\bar{u}(t')$ – 5-вектор скорости заряженной частицы; $\bar{R}(t')$ – радиус-вектор, соединяющий источник поля с точкой наблюдения; $(\bar{R},\bar{u})$ – их скалярное произведение. Значения обоих этих векторов берутся в момент времени t':

$$\bar{R} = \{c(t-t'),\ (\vec{r}-\vec{r}'(t')),\ R_s\},$$
$$\bar{u} = \{u_t(t'),\ u_x(t'),\ u_y(t'),\ u_z(t'),\ u_s(t')\}. \tag{23}$$

Оба эти вектора изотропны. По своей структуре радиус-вектор $\bar{R}$ похож на вектор энергии-импульса-массы фотона [1 – 3], а вектор скорости $\bar{u}$ на вектор энергии-импульса-массы массивной частицы. В пустом пространстве

$$\bar{R} = \{c(t-t'), (\vec{r} - \vec{r}'(t')), 0\}, \bar{u} = \left\{\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}, c\right\}. \qquad (24)$$

Расписывая покомпонентно скалярное произведение $(\bar{R}, \bar{u})$, выражение (22) для потенциалов Лиенара–Вихерта можно записать в виде

$$A_t = \varphi(t) = \frac{emc}{cR_{(4)}(t') - (\vec{R}_{(4)}(t'), \vec{u}_{(4)}(t'))}. \qquad (25)$$

Здесь величины $\vec{R}_{(4)}$, $\vec{u}_{(4)}$ обозначают пространственные части 5-векторов $\bar{R}, \bar{u}$

$$\vec{R}_{(4)} = ((x-x'), (y-y'), (z-z'), (s-s')), \qquad (26)$$

$$\vec{u}_{(4)} = (u_x, u_y, u_z, u_s) = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', \dot{s}'),$$

а их скалярное произведение $(\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)})$ имеет вид

$$(\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)}) = (\vec{R}_{(4)}, \dot{\vec{R}}_{(4)}) = \qquad (27)$$

$$-((x-x')\dot{x}' + (y-y')\dot{y}' + (z-z')\dot{z}' + (s-s')\dot{s}').$$

Мы будем пользоваться обозначением

$$\mathcal{L}_{(4)} = R_{(4)}(t') - \frac{1}{c}(\vec{R}_{(4)}(t'), \vec{u}_{(4)}(t')). \qquad (28)$$

С его помощью потенциалы (22) можно записать в виде

$$A_t(t) = \frac{em}{\mathcal{L}_{(4)}(t')}, \qquad (29)$$

$$A_x(t) = \frac{emu_x}{c\mathcal{L}_{(4)}(t')}, \; A_y(t) = \frac{emu_y}{c\mathcal{L}_{(4)}(t')},$$

$$A_z(t) = \frac{emu_z}{c\mathcal{L}_{(4)}(t')}, \; A_s(t) = \frac{emu_s}{c\mathcal{L}_{(4)}(t')}.$$

Параметры t и t' связаны друг с другом соотношением (18).

Отметим, что найденные таким способом потенциалы Лиенара–Вихерта в расширенном пространстве $G(T; \vec{X}, S)$ как частный случай дают обычные потенциалы

Лиенара–Вихерта в сплошной среде [12, 13]. Их связь устанавливается с помощью соотношения (17).

Потенциалы (29) являются решениями системы (5) – (7) вида

$$f = f((\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)})).$$

Это не сферически-симметричное решение, поэтому на него не распространяется утверждение теоремы о том, что n-мерный лапласиан имеет решения вида

$$f = r^{-n+2}, \text{ при } n > 2, \text{ и } f = \ln r \text{ при } n = 2.$$

Тот факт, что для неподвижных частиц решение (29) дает обычный кулоновский потенциал, непосредственно следует из формулы (21). Действительно, решение (29) мы получили, переходя от неподвижной частицы к движущейся, поэтому останавливая частицу, мы вернемся от общего решения (29) к частному решению (21). Это решение можно переписать в форме (20), которая в случае пустого пространства ($v = c$, $R_3 = R_4$) дает обычный кулоновский потенциал.

Найдем теперь напряженности полей, соответствующих потенциалам Лиенара–Вихерта (29). Для этого воспользуемся формулой

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}, \; i, k = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{30}$$

связывающей напряженности с потенциалами.

Сначала вычислим напряженность электрического поля $\vec{E}$. Для этого следует воспользоваться формулой

$$\vec{E} = -\frac{1}{mc}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{m}\,\mathrm{grad}\, A_t, \tag{31}$$

аналогичной той, по которой вычисляется электромагнитное поле в обычной электродинамике [11]. Отличие состоит в том, что в формуле (31) правая часть поделена на массу покоя источника тока m. В обычной электродинамике такое деление осуществляется еще на стадии построения 4-вектора тока из 4-вектора энергии–импульса, в нашей модели мы относим эту процедуру на момент вычисления напряженностей электромагнитного поля. Отметим, что так определенное поле $\vec{E}$ является 2-компонентным тензором в пространстве Минковского $M(T; \vec{X})$, но это не тензор в расширенном пространстве $G(T; \vec{X}, S)$. В этом пространстве тензорами являются величины (30), а напряженность

(31) преобразуется при вращениях в пространстве $G(T;\vec{X},S)$ по гораздо более сложному закону.

Подставляя сюда выражения для потенциалов (29), получим

$$\vec{E}=\frac{e}{c^2\mathcal{L}^3_{(4)}}\left(\left(c^2-\vec{u}^2_{(4)}\right)\left(\vec{R}_{(3)}-\frac{1}{c}\vec{u}_{(3)}R_{(4)}\right)+\left(\vec{R}_{(3)}-\frac{\vec{u}_{(3)}}{c}R_{(4)}\right)(\vec{R}_{(4)},\vec{u}_{(4)})-\right.$$

$$\left.-\frac{e}{c^2\mathcal{L}^3_{(4)}}\left(\left(R^2_{(4)}-\frac{R_{(4)}}{c}(\vec{R}_{(4)},\vec{u}_{(4)})\right)\vec{u}_{(3)}\right)\right). \tag{32}$$

Магнитное поле имеет вид:

$$\vec{H}=\frac{1}{m}\mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{33}$$

Подставляя сюда значения потенциалов, получаем

$$\vec{H}=-\frac{e}{c^2\mathcal{L}^2_{(4)}}[\vec{R}_{(3)},\vec{u}_{(3)}]+\frac{e}{c^2R_{(4)}\mathcal{L}^2_{(4)}}\times$$

$$\times\left[\vec{u}_{(3)},\left(c\vec{R}_{(3)}-R_{(4)}\vec{u}_{(3)}+\left(c(\vec{R}_{(4)},\vec{u}_{(4)})+R_{(4)}(\vec{R}_{(4)},\vec{u}_{(4)})-R_{(4)}u^2_{(4)}\right)\frac{\vec{R}_{(3)}}{c^2\mathcal{L}_{(4)}}\right)\right]. \tag{34}$$

Как и в обычном случае, поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением

$$\vec{H}=\frac{1}{R_{(4)}}[\vec{R}_{(3)},\vec{E}]. \tag{35}$$

Формулы (32) – (35) внешне похожи на аналогичные формулы для электрического и магнитного полей в случае обычной электродинамики [11]. Разница состоит в том, что в формулы (32) – (35) входят как 3-мерные вектора $\vec{R}_3$, так и модуль 4-мерного вектора R_4, в обычной же электродинамике в соответствующих формулах вместо модуля 4-мерного вектора R_4 стоит модуль 3-мерного вектора R_3.

Формулы (32), (34) дают выражения для электрических и магнитных полей, но с их помощью можно получить выражения и для всех других напряженностей (30). Для этого следует учесть, что вектора $\vec{u}_{(3)},\vec{R}_{(3)}$ в формулах (32), (34) – это 3-мерные вектора, 3 компоненты которых выбираются из 4-х компонент 4-мерных векторов $\vec{u}_{(4)},\vec{R}_{(4)}$. Такие тройки компонент можно выбирать разным способом. Если мы выбрали компоненты x,y,z, то получим электрическое и магнитное поля, которые отличаются от обычных только тем, что теперь их компоненты зависят еще и от переменной s. Если выбрать другую тройку переменных, то получим другие компоненты тензора напряженностей

(30). Так, например, если выбираются переменные y, z, s, то в формулах (31), (33) будет стоять 3-вектор–потенциал $\vec{A}_{(3)}$ с компонентами (A_y, A_z, A_s). Соответственно и в левой части формулы (31) будут стоять те же самые компоненты 4-вектора $\vec{E}_{(4)} : (E_y, E_z, E_s = Q = F_{40})$. Формула (33) дает в этом случае напряженности $H_x, G_y = F_{42}$, $G_z = F_{43}$. Новые поля $Q, \vec{G}$ появляются за счет того, что теперь имеется 5 потенциалов $(A_t, \vec{A}, A_s)$ и все они зависят еще и от новой переменной s.

Приведем явный вид этих полей:

$$Q = \frac{e}{c^2\mathcal{L}^3_{(4)}}\left((c^2 - \vec{u}^2_{(4)})\left(R_s - \frac{1}{c}u_s R_{(4)}\right) + \left(R_s - \frac{u_s}{c}R_{(4)}\right)(\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)})\right) -$$

$$- \frac{e}{c^2\mathcal{L}^3_{(4)}}\left(\left(R^2_{(4)} - \frac{R_{(4)}}{c}(\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)})\right)\dot{u}_s\right). \qquad (36)$$

Для того, чтобы найти явный вид компонент вектора $\vec{G}$, введем обозначения

$$\vec{D} = (H_x, G_y, G_z),\ \vec{R}^{(x)}_{(3)} = (R_y, R_z, R_s),\ \vec{u}^{(x)}_{(3)} = (u_y, u_z, u_s). \qquad (37)$$

Верхний индекс (x) у 3-мерных векторов указывает на ту координату 4-мерного пространства, которая отсутствует у этого 3-мерного вектора.

Используя эти обозначения, получим выражение для вектора $\vec{D}$:

$$\vec{D} = -\frac{e}{c^2\mathcal{L}^2_{(4)}}\left[\vec{R}^{(x)}_{(3)}, \dot{\vec{u}}^{(x)}_{(3)}\right] + \frac{e}{c^2 R_{(4)}\mathcal{L}^2_{(4)}}\times$$

$$\times\left[\vec{u}^{(x)}_{(3)}, \left(c\vec{R}^{(x)}_{(3)} - R_{(4)}\vec{u}^{(x)}_{(3)} + (c(\vec{R}_{(4)}, \vec{u}_{(4)}) + R_{(4)}(\vec{R}_{(4)}, \dot{\vec{u}}_{(4)}) - R_{(4)}u^2_{(4)})\frac{\vec{R}^{(x)}_{(3)}}{c^2\mathcal{L}_{(4)}}\right)\right]. \qquad (38)$$

Если в формуле (38) заменить верхний индекс (x) на (y), то она вместо вектора $\vec{D}$ с компонентами (37) даст вектор $\vec{D}'$ с компонентами

$$\vec{D}' = (H_y, G_z, G_x). \qquad (39)$$

При этом

$$\vec{R}^{(y)}_{(3)} = (R_z, R_s, R_x),\ \vec{u}^{(y)}_{(3)} = (u_z, u_s, u_x).$$

Таким образом видно, что в зависимости от того, какие компоненты 4-векторов $\vec{u}_{(4)}, \vec{R}_{(4)}$ входят в формулы (32), (34), они позволяют вычислять различные наборы компонент тензора напряженностей (30).

Рассмотрим конкретный пример частицы с массой m и зарядом e, у которой постоянны пространственные координаты x, y, z, но может меняться координата s. Иначе говоря, ее 4-вектора положения, скорости и ускорения имеют вид:

$$\vec{R}_{(4)} = (x, y, z, R_s),\ \vec{u}_{(4)} = (0, 0, 0, u),\ \vec{\dot{u}}_{(4)} = (0, 0, 0, \dot{u}_s). \qquad (40)$$

Здесь мы используем введенное ранее обозначение R_s для расстояния в 4-мерном евклидовом пространстве между источником поля и точкой наблюдения. Отметим, что при движении заряда со скоростью u_s происходит изменение расстояния R_s, но связь между ними достаточно сложна и определяется распределением показателя преломления $n(\vec{r})$ во всем пространстве между ними. При ее вычислении следует учитывать соотношения (16) – (18) и свойства среды.

Используя формулу (32), получаем выражение для напряженностей электрического поля

$$\vec{E} = ec\frac{c^2 - u_s^2 + R_s\dot{u}_s}{(cR_{(4)} - R_s u_s)^3}\vec{R}_{(3)}. \qquad (41)$$

Знаменатель этого выражения всегда больше нуля, поскольку скорость заряда u_s всегда меньше скорости света в пустоте c, а расстояние R_s по координате s всегда меньше полного расстояния R_s, поскольку источник излучения и точка наблюдения всегда пространственно разделены.

Но числитель выражения (41) может менять знак в зависимости от того, какова величина и знак ускорения $\dot{u}_s$. Если это ускорение достаточно велико, т.е. велика скорость изменения оптической плотности среды вокруг неподвижного заряда, то напряжение электрического поля $\vec{E}$ поменяет свой знак, т.е. одноименные заряды начнут притягиваться, а разноименные отталкиваться.

Интересно сравнить выражение (41) с выражением для напряженности электрического поля, которое получается с помощью обычных потенциалов Лиенара–Вихерта [12]. Пусть 3-мерная скорость направлена вдоль оси X

$$\vec{u}_3 = (u_x, 0, 0). \qquad (42)$$

В этом случае компонента E_x электрического поля имеет вид:

$$E_x = \frac{e}{c^2\mathcal{L}_{(3)}^3}\left((c^2 - u_x^2)\left(R_x - \frac{u_x}{c}R_{(3)}\right) - (R_y^2 + R_z^2)\dot{u}_x\right). \qquad (43)$$

Здесь величина $\mathcal{L}_{(3)}$ имеет вид аналогичный (28), только вместо 4-мерных векторов стоят 3-мерные:

$$\mathcal{L}_{(3)} = R_{(3)}(t') - \frac{1}{c}(\vec{R}_{(3)}(t'), \vec{u}_{(3)}(t')).$$

Из формулы (43) видно, что компонента напряженности E_x может менять свой знак в зависимости от величины и знака ускорения $\dot{u}_x$. Однако на практике такое изменение знака, т.е. переход притяжения в отталкивание и наоборот, наблюдать довольно затруднительно, поскольку сверхбольшие величины ускорений можно создать только на очень короткие промежутки времени. Причем это ускорение должно быть положительным, т.е. скорость движения заряженной частицы должна резко возрасти.

Кроме того, эффект смены знака у силы взаимодействия возникает только в том случае, когда скорость частицы направлена не по линии, соединяющей частицу с точкой наблюдения. Иными словами, величина $(R_y^2 + R_z^2)$ в формуле (43) не должна быть равна нулю. Отсюда следует, что при лобовом движении заряженных частиц друг к другу смены знака силы взаимодействия не происходит, она имеет место только в том случае, когда прицельный параметр не равен нулю. Такая ситуация может возникнуть, например, при падении заряженной частицы на кулоновский центр. Вблизи этого центра напряженность поля велика, что может вызвать большие ускорения падающей частицы и смену притяжения отталкиванием.

Вернемся к анализу напряженностей (30) при условии (40).

Поле Q имеет вид:

$$Q = \frac{e}{c^2\mathcal{L}_{(4)}^3}\left((c^2 - u_s^2)\left(R_s - \frac{R_s}{c}R_{(4)}\right) - (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)\dot{u}_s\right). \tag{44}$$

Из формулы (44) видно, что поле Q также, как и поле $\vec{E}$, может менять свой знак в зависимости от знака и величины ускорения $\dot{u}_s$.

Поскольку напряженности $\vec{H}, \vec{G}$ выражаются через поля $\vec{E}, Q$ с помощью формул (35), (38), они также меняют свой знак в тот момент, когда это делают поля $\vec{E}, Q$.

Такое изменение знака напряженностей полей и, как следствие, смену знака силы Лоренца можно связать с реакцией излучения этих полей, которое возникает, когда заряженные частицы движутся с ускорением.

Полученные в данной работе результаты показывают, что при обобщении электродинамики на расширенное пространство удается сохранить все основные элементы теории. Поля точечных зарядов описываются обобщенными потенциалами Лиенара–Вихерта, что позволяет проанализировать их поведение в ряде конкретных случаев. Этот результат указывает на связь между электромагнитным и гравитационным полями и определяет направление, в котором следует двигаться с целью построения их совместной теории.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 6, 23 (2000).
[2] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 5, М., 1999.
[3] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 9, М., 1999.
[4] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 2, М., 2000.
[5] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 1, М., 2001.
[6] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 4, М., 2001.
[7] Ципенюк Д. Ю. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7, 39 (2001).
[8] Окунь Л. Б. УФН, **158**, 511 (1989).
[9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, М., Наука, 1967.
[10] Болотовский Б. М., Быков В. П. УФН, **160**, 511 (1999).
[11] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика, М., Наука, 1981.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 20 марта 2002 г.