

УДК 533.9

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ПЫЛЕВОЙ РЕШЕТКИ

Н. Г. Гусейн-заде, Д. Н. Клочков

Рассматривается поперечная неустойчивость плоского двумерного пылевого кристалла, решетка которого имеет плотную гексагональную структуру, в предположении произвольного изотропного парного потенциала взаимодействия, зависящего только от расстояния между частицами $V(r)$. Получено дисперсионное соотношение и критерий неустойчивости (критерий плавления кристалла).

В последние десятилетия проводятся многочисленные экспериментальные исследования двумерных пылевых структур [1 – 3]. Эти эксперименты включают дисперсионный анализ и исследование распространения волн в кристалле, исследование дефектов кристаллической решетки и многое другое.

Из-за наличия силы тяжести монослойные кристаллы могут формироваться лишь в очень узком интервале масс пылинок. Это обусловлено балансом сил в вертикальном направлении. Кроме этого, для образования больших систем необходимо, чтобы эквипотенциальные поверхности электрического поля, удерживающего пылинки в подвешенном состоянии, были достаточно протяженными в горизонтальном направлении. Этому требованию наилучшим образом удовлетворяют ВЧ- и индуктивные разряды плазменных устройств [4]. Так, например, в типичных экспериментах [1 – 3] наблюдается формирование двумерных кулоновских кристаллов в лабораторной пылевой плазме, когда заряженные частицы пыли левитируют в узкой области плазменного ВЧ-разряда над горизонтально расположенным электродом. В результате пылинки накапливаются в приэлектродном слое. При большом числе пылинок $N \gg 1$ образуется слой, в котором частицы, как правило, упорядочены в гексагональную структуру, т.е. возникает двумерный кристалл. При большой концентрации пылинок, когда среднее расстояние

между частицами становится меньше критического значения, происходит плавление кристалла: начинает формироваться второй слой пыли.

Монослой пылинок слабо влияет на электронную и ионную компоненты плазмы, поэтому плазменная и пылевая подсистемы могут рассматриваться отдельно. Влияние плазменной компоненты на пылевую подсистему учитывается только через форму межчастичного потенциала взаимодействия пылинок.

Общий внешний потенциал (гравитационный плюс электрический) в узкой области локализации кристалла, как показали эксперименты [5, 6], хорошо аппроксимируется параболической формой

$$V_{ext} = \frac{1}{2}\alpha z^2. \quad (1)$$

Здесь z – координата вертикального направления, α – параболический коэффициент.

При определенных условиях удерживающего внешнего потенциала (1) оказывается недостаточно и происходит разрушение плоскости кристалла. Такие структурные фазовые переходы для плазменного кристалла были исследованы теоретически [6, 7] для юкавовского потенциала взаимодействия. В работе [8] было получено дисперсионное соотношение для плотной гексагональной решетки при юкавовском потенциале взаимодействия. Там же было получено численное решение этого уравнения для частного случая и показана возможность развития продольной неустойчивости.

Тем не менее известно, что взаимодействие между частицами пыли не ограничивается только юкавовским (в частном случае кулоновским) потенциалом [9]. Поэтому в данной работе, обобщая полученные ранее результаты, рассматривается поперечная неустойчивость пылевого кристалла для произвольного изотропного парного потенциала взаимодействия, зависящего только от расстояния между частицами $V(r)$, и находятся условия ее развития.

Рассмотрим плоский двумерный кристалл плотной гексагональной бесконечной решетки, ориентированной в плоскости XU и имеющей следующие вектора прямой решетки $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}d(\sqrt{3}, 1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = d(0, 1, 0)$. Решетка переходит в себя при трансляции $\mathbf{a}_{(n)} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$, где $n_1, n_2 \in \mathcal{Z}$, $(n) = \{n_1, n_2\}$ – мультииндекс, нумерующий элементарные ячейки. Наименьшее расстояние между частицами положим равным d .

Пусть потенциал парного взаимодействия между частицами одинаковой массы m является функцией расстояния между ними, т.е. $V = V(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|) = V(\xi_{nk})$, где $\xi_{nk} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|$. Кроме внутреннего взаимодействия имеется внешний удерживающий потенциал (1). Уравнение движения для k -й частицы имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_k = - \sum_{n \neq k} V'(\xi_{nk}) \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n}{\xi_{nk}} - \frac{\partial V_{ext}}{\partial \mathbf{r}_k}. \quad (2)$$

Здесь суммирование проводится по всем частицам.

Пусть равновесному состоянию системы соответствует положение всех частиц в плоскости $z = 0$ (т.е. все $z_k^0 = 0$) в узлах решетки $\mathbf{r}_k^0 \in XY$. Из уравнения (2) получаем условие равновесия

$$\sum_{n \neq k} \frac{V'(\xi_{nk}^0)}{\xi_{nk}^0} (\mathbf{r}_k^0 - \mathbf{r}_n^0) = 0, \quad (3)$$

которое выполняется всегда в силу симметрии решетки для любого потенциала.

Рассмотрим малые колебания вблизи положения равновесия. Пусть $\delta \mathbf{r}_k$ – малые возмущения, т.е. $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^0 + \delta \mathbf{r}_k$. Линеаризуя уравнения движения (2) по малым возмущениям, получим

$$m\delta\ddot{\mathbf{r}}_k = - \sum_{n \neq k} \left[\frac{V'(\xi_{nk}^0)}{\xi_{nk}^0} (\delta \mathbf{r}_k - \delta \mathbf{r}_n) + \left(V''(\xi_{nk}^0) - \frac{V'(\xi_{nk}^0)}{\xi_{nk}^0} \right) \frac{\mathbf{r}_k^0 - \mathbf{r}_n^0}{(\xi_{nk}^0)^2} (\mathbf{r}_k^0 - \mathbf{r}_n^0) (\delta \mathbf{r}_k - \delta \mathbf{r}_n) \right] - \frac{\partial V_{ext}}{\partial \mathbf{r}_k}. \quad (4)$$

Так как вектор $\mathbf{r}_k^0 - \mathbf{r}_n^0$ лежит в плоскости $z = 0$, то данное векторное уравнение расщепляется на два независимых уравнения, описывающих чисто продольные и поперечные колебания. Представим вектор возмущения в виде $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{r}_{k||} + z_k \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ – вектор единичной нормали к плоскости решетки.

В дальнейшем нас будут интересовать поперечные колебания и поперечная неустойчивость кристалла, т.е. мы будем рассматривать только проекцию уравнения (4) на ось z :

$$m\ddot{z}_k + \left(\alpha + \sum_{n \neq k} \frac{V'(\xi_{nk}^0)}{\xi_{nk}^0} \right) z_k - \sum_{n \neq k} \frac{V'(\xi_{nk}^0)}{\xi_{nk}^0} z_n = 0. \quad (5)$$

Полученное уравнение является дискретным аналогом на пространстве решетки однородному интегродифференциальному уравнению с симметричным ядром в непрерывном пространстве. Плотная гексагональная решетка является простой, так как на элементарную ячейку приходится одна частица $\mathbf{r}_n^0 = \mathbf{a}_{(n)}$. Поэтому общее решение уравнения (5) ищем в виде плоской волны на дискретном пространстве решетки [10]

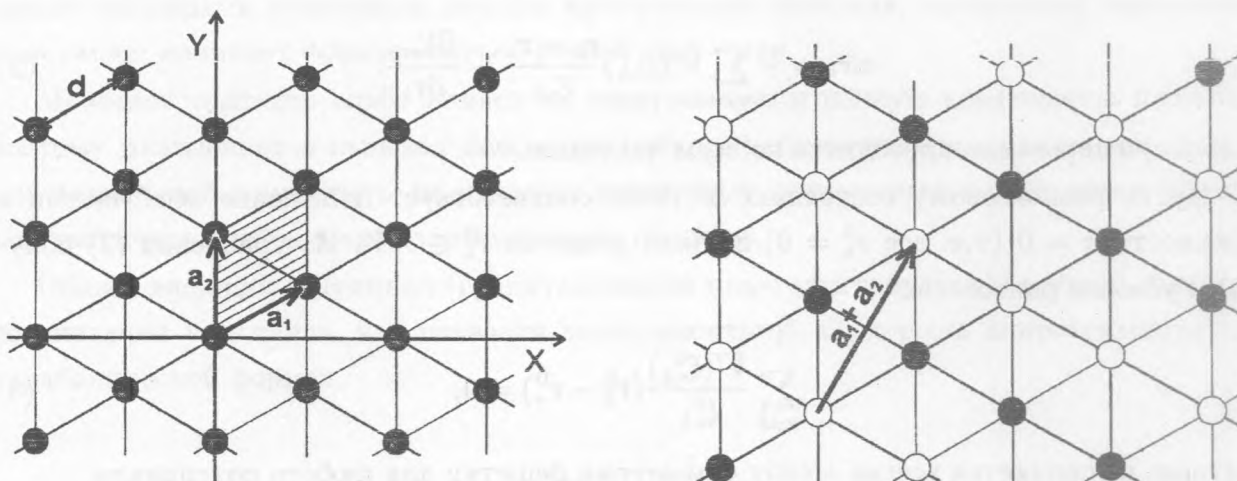


Рис. 1. Плотная гексагональная решетка.

Рис. 2. Развитие поперечной неустойчивости гексагональной решетки. Белым и черным цветом показаны относительные направления отклонений частиц от положения равновесия.

$$z_n = A(\mathbf{q})e^{i(\mathbf{q}\mathbf{a}_{(n)} - \omega t)}, \quad (6)$$

которое, в свою очередь, является аналогом разложения в интеграл Фурье. Если заменить \mathbf{q} на $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{b}_{(g)}$, где $\mathbf{b}_{(g)} = g_1\mathbf{b}_1 + g_2\mathbf{b}_2$ ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – вектора обратной решетки), то получим $\mathbf{q}'\mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{q}\mathbf{a}_{(n)} + 2\pi k$ (здесь $k = n_1g_1 + n_2g_2$ – целое число). Это означает, что волновой вектор \mathbf{q} 2π -периодичен по векторам обратной решетки; в качестве главного значения области изменения выберем первую зону Бриллюэна: $-\pi \leq \mathbf{q}\mathbf{a}_i \leq \pi$, ($i = 1, 2$). Таким образом решения (6) удовлетворяют трансляционной симметрии задачи.

Подстановка решения (6) в уравнение (5) дает дисперсионную зависимость

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \frac{1}{m}[\alpha + \Omega(\mathbf{q})], \quad (7)$$

где

$$\Omega(\mathbf{q}) = \sum_{(n)} \frac{V'(\xi_n^0)}{\xi_n^0} (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}_{(n)}}). \quad (8)$$

Здесь расстояние определяется выражением $\xi_n^0 = |\mathbf{a}_{(n)}| = d\sqrt{n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2}$.

Сделаем интегральную оценку суммы (8)

$$\Omega(\mathbf{q}) = \rho \int_d^\infty \int_0^{2\pi} \frac{V'(r)}{r} (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}) r dr d\varphi = 2\pi\rho \int_d^\infty (1 - J_0(qr)) V'(r) dr. \quad (9)$$

Здесь средняя плотность частиц равна $\rho = 2/(\sqrt{3}d^2)$. В результате дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \left[\alpha + 2\pi\rho \int_d^\infty (1 - J_0(qr)) V'(r) dr \right]. \quad (10)$$

Квадрат частоты $\omega^2(q)$ достигает своего минимума при $q = q_{max} = 2\pi/d$, что соответствует векторам $\mathbf{q} = \frac{\pi}{d}(\sqrt{3}, -1, 0)$ и $\mathbf{q} = \frac{\pi}{d}(-\sqrt{3}, 1, 0)$. Условие развития поперечной неустойчивости (плавления кристалла)

$$\min\{\omega^2(q)\} = \omega^2(q_{max}) < 0 \quad (11)$$

принимает вид

$$\int_d^\infty \left[1 - J_0\left(2\pi\frac{r}{d}\right) \right] V'(r) dr < -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \alpha d^2. \quad (12)$$

Здесь мы имеем коротковолновую неустойчивость, которая ломает плоскость кристалла, превращая его в "стиральную доску". Вектор трансляции возмущений равен $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. Это совпадает с результатами численного анализа, проведенного в работе [8] для юкавовского потенциала. На рис. 2 белым и черным цветом показаны относительные направления отклонений частиц от положения равновесия. Развитие неустойчивости приводит к спонтанному нарушению симметрии. Волна возмущений может распространяться в одном из трех направлений. Два других направления получаются из изображенного на рисунке поворотами на 120 градусов.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ-05-02-16796-а и NWO-047-016-020.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Thomas H., Morrill G. E., Demmel V., et al. Phys. Rev. Lett., **73**, 652 (1994).
- [2] Chu J. H. and I. L. Phys. Rev. Lett., **72**, 4009 (1994).

- [3] Hayashi Y. and Tachibana K. Jpn. J. Appl. Phys., Part 2, **33**, L804 (1994).
- [4] Томас В. Х., Морфилл Г. Е., Цытович В. Н. Физика плазмы, **29**, 963 (2003).
- [5] Томме Е. В., Law D. A., Annaratone V. M., and Allen J. E. Phys. Rev. Lett., **85**, 2518 (2000).
- [6] Totsuji H., Kishimoto T., and Totsuji C. Phys. Rev. Lett., **78**, 3113 (1997).
- [7] Totsuji Hiroo, Totsuji Chieko, Tsuruta Kenji. Phys. Rev. E, **64**, 066402 (2001).
- [8] Qiao K. and Hyde T. W. Phys. Rev. E, **68**, 046403 (2003).
- [9] Игнатов А. М. Физика плазмы, **31**, 52 (2005).
- [10] Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М., Наука, 1978.

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 25 января 2006 г.