УДК 530.1

О КЛАССИФИКАЦИИ ПО ОПТИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ И ЯВЛЕНИИ КОНИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ В СРЕДАХ С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ ТЕНЗОРАМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ

Н. А. Жура

В работе изучено распространение электромагнитных волн в так называемых масштабных кристаллах, т.е. в кристаллах с анизотропией тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. При этом предполагается, что эти тензоры не имеют общих осей. Получено представление решения в явном виде и, в частности, полностью изучено строение нормальной поверхности.

В оптике анизотропных сред – кристаллов – обычно ограничиваются рассмотрением наиболее важных случаев, когда среду можно считать (в данной области частот) немагнитной и прозрачной. В этих условиях хорошо известна классификация таких сред по их оптическим свойствам и изучено значительное число эффектов, протекающих в них [1, 2].

Цель настоящей заметки состоит в выяснении влияния намагничения на оптические свойства. В ней приводится классификация кристаллов с анизотропией диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей (называем их магнитными, следуя [3]) по их оптическим свойствам, включающая существующую (при μ const), и даны основные формулы, характеризующие явление конической рефракции в них.

Относительно тензоров ε и μ предполагается лишь, что они вещественны, симметричны и положительно определены. Основные результаты изложены для случая, когда они не имеют ни одной общей оси. Они обобщают полученные ранее результаты [3] в этом направлении. Отметим также, что рассматриваемый в заметке вопрос тесно связан с явлением гиротропии [4]. Он обсуждался, в частности, в [5, 6]. Проводимый ниже анализ основан на использовании полученного в [7] представления одного класса неотрицательных биквадратичных тернарных форм в виде суммы двух квадратов квадратичных форм. Отметим, что конструктивное доказательство известной теоремы Гильберта [8] о представимости произвольной неотрицательной биквадратичной тернарной формы в виде суммы трех квадратов, по-видимому, отсутствует [9].

Дисперсионное уравнение. Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в средах с анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей имеют вид:

$$c_0^{-1}\partial D/\partial t = \mathrm{rot} H,\ \mathrm{div} D = 0,$$

$$c_0^{-1}\partial B/\partial t = -\mathrm{rot} E,\ \mathrm{div} B = 0, \tag{1}$$

где векторы электрического смещения D и магнитной индукции B связаны с напряженностями электрического E и магнитного H полей материальными уравнениями

$$D = \varepsilon E,\ B = \mu H. \tag{2}$$

Фигурирующая в (1) постоянная c_0 – скорость света в вакууме.

Поскольку при фиксированном базисе матрицы тензоров ε и μ в силу сделанных предположений обратимы, то, имея в виду (2), в уравнениях (1) в качестве величин, характеризующих поле, можно считать как пару $\{E, H\}$, так и пару $\{D, B\}$. Кроме того, базис можно считать выбранным так, что одна из матриц ε или μ диагональна. Далее считаем диагональной $\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, 3$, и это же относится к $a = \varepsilon^{-1}$. Обратную к μ матрицу обозначаем b.

Следуя классической схеме, рассмотрим плоские волны вида

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - kx)},\ H = H_0 e^{-i(\omega t - kx)},$$

где $kx = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ – скалярное произведение вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ и волнового вектора $k = (k_1, k_2, k_3)$. Подстановка их в уравнения (1), с учетом (2), приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{\omega^4}{c_0^4} + \frac{\omega^2}{c_0^2}p(k) + q(k) = 0, \tag{3}$$

где

$$p(k) = -(c^*k, k),\ q(k) = (a^*k, k)(b^*k, k). \tag{4}$$

Здесь принято обозначение a^* для присоединенной к a матрице. Для неособых матриц $a^* = a^{-1} \cdot \det a$. Квадратичные формы (a^*k, k) и (b^*k, k), в силу условий на ε и μ, положительно определены, и это же относится к форме (c^*k, k), где $c^* = (a+b)^* - a^* - b^*$. Уравнение (3), когда μ – скалярная матрица, носит название уравнения Френеля, в общем случае называем его так же. В силу сказанного, число $\omega = 0$ не является корнем дисперсионного уравнения.

Корнями уравнения (3) являются числа $\pm\omega_\pm$ (возможны любые комбинации знаков), где

$$2\omega_\pm^2(k) = c_0^2\left(p(k) \pm \sqrt{d(k)}\right),\ d(k) = p^2(k) - 4q(k). \tag{5}$$

В частности, уравнение Френеля (3) имеет кратные корни при тех значениях волнового вектора k, при которых дискриминант $d(k) = 0$.

Пусть ортогональная матрица e приводит матрицу $s = a^{-1/2}ba^{-1/2}$ к диагональному виду

$$e^{-1}se = \nu,\ \nu = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \tag{6}$$

Если перестановка $\{i, k, j\}$ индексов $\{1, 2, 3\}$ такова, что $\nu_i < \nu_k < \nu_j$, то заменой переменных

$$\zeta = e^*(a^*)^{1/2}k \tag{7}$$

биквадратичная форма $d(k)$ приводится к виду

$$d(\zeta) = d_+(\zeta)d_-(\zeta),\ d_\pm(\zeta) = (\nu_j - \nu_i)\zeta_k^2 + (\sqrt{\nu_j - \nu_i}\zeta_i \pm \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j)^2. \tag{10}$$

Если же $\nu_i = \nu_k < \nu_j$ или $\nu_i < \nu_k = \nu_j$, то

$$d(\zeta) = d_0^2(\zeta), \tag{11}$$

где $d_0(\zeta)$ совпадает с $(\nu_j - \nu_i)(\zeta_i^2 + \zeta_k^2)$ или с $(\nu_j - \nu_i)(\zeta_j^2 + \zeta_k^2)$.

Если же $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, то ν – скалярная матрица, значит $\varepsilon = \nu\mu$, в частности ε и μ коммутируют и $d(\zeta) \equiv 0$.

Поверхность волновых векторов и классификация магнитных сред по их оптическим свойствам. Положим, следуя [2], $k = \omega n/c_0$, $n = (n_1, n_2, n_3)$. Тогда для поверхности волновых векторов получим уравнение

$$q(n) + p(n) + 1 = 0. \tag{12}$$

Заменой переменных $\zeta = e^*(a^*)^{1/2}n$, фигурирующей в (7), после некоторых преобразований оно приводится к виду (ср. с [1], [2])

$$\zeta_1^2/(\zeta^2 - 1/\nu_1) + \zeta_2^2/(\zeta^2 - 1/\nu_2) + \zeta_3^2/(\zeta^2 - 1/\nu_3) = 1. \tag{13}$$

В совокупности с представлениями (10), (11) это приводит к следующей классификации рассматриваемых сред по их оптическим свойствам.

Если все собственные значения матрицы s попарно различны, то соответствующую среду называем двухосной. Она имеет две оптические оси (называемые бинормалями) с уравнениями

$$\zeta_k = 0, \ \sqrt{\nu_j - \nu_i}\zeta_i + \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j = 0 \text{ и } \zeta_k = 0, \ \sqrt{\nu_j - \nu_i}\zeta_i - \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j = 0.$$

Таким образом, имеются два направления, вдоль каждого из которых может распространяться только одна волна.

Эти оси проходят через начало координат, расположены симметрично относительно осей координат и лежат на плоскости, содержащей собственные вектора матрицы s, отвечающие наибольшему и наименьшему ее собственным числам. Их точки пересечения с поверхностью (13) являются особыми.

Таким образом, утверждение работы [3] о том, что оптические оси расположены на плоскости, содержащей собственные вектора матрицы ba^{-1} (в наших обозначениях), отвечающие наибольшему и наименьшему собственным ее значениям, некорректно. Хотя собственные значения этой матрицы и матрицы s совпадают, но их собственные вектора расположены на одной плоскости тогда и только тогда, когда ε и μ коммутируют.

Одноосными называем среды, у которых имеется лишь одно направление, называемое оптической осью, вдоль которого может распространяться только одна волна. Такие среды характеризуются тем, что матрица s имеет только два различных собственных значения. Уравнение оси имеет вид $\zeta_i = \zeta_k = 0$ или $\zeta_j = \zeta_k = 0$. Она также пересекает поверхность (13) в особых точках.

Наконец, если $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, то, как нетрудно проверить, уравнение нормальных векторов принимает вид $(\zeta^2 - \frac{1}{\nu})^2 = 0$, т.е. является сферой.

Рассматривая случай коммутирующих матриц ε и μ, сразу можно считать их диагональными, так что $\nu_i = s_i = \varepsilon_i/\mu_i$, $i = 1, 2, 3$. Уравнение (13) в этом случае упрощается, поскольку достаточно использовать лишь "растянутые" координаты $\eta = (a^*)^{1/2}n$

$$\eta_1^2/(\eta^2 - \mu_1/\varepsilon_1) + \eta_2^2/(\eta^2 - \mu_2/\varepsilon_2) + \eta_3^2/(\eta^2 - \mu_3/\varepsilon_3) = 1.$$

Здесь обозначено для краткости $\eta^2 = (\eta, \eta) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$. В частности, если $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, то

$$\eta_1^2/(\eta^2 - 1/\varepsilon_1) + \eta_2^2/(\eta^2 - 1/\varepsilon_2) + \eta_3^2/(\eta^2 - 1/\varepsilon_3) = 1.$$

Существующая классификация относится именно к этому случаю. Ясно, что *когда ε и μ коммутируют, но μ не является скаляром, нужная классификация получается из существующей заменой $\varepsilon_i \mapsto \nu_i$, $i = 1, 2, 3$. Если же ε и μ не коммутируют, то классификация получается с помощью аналогичной замены $\varepsilon_i \mapsto \nu_i$, $i = 1, 2, 3$, но относится к координатам, получающимся из исходных преобразованием (7).*

О конической рефракции в магнитно-анизотропных кристаллах. Предложенный в предыдущих разделах подход позволяет исследовать основные оптические эффекты в рассматриваемых магнитно-анизотропных средах. Остановимся здесь, вкратце, на одном из них – явлении конической рефракции [1], [2].

С этой целью заметим, что поверхность волновых векторов является самопересекающейся, в особых точках, поверхностью с уравнением (13). Дуальная к ней лучевая поверхность также является алгебраической поверхностью четвертого порядка и также называется поверхностью Френеля. Каждая из этих поверхностей переходит друг в друга, если заменить $\nu_i \mapsto 1/\nu_i$, $\zeta \mapsto \eta$, $\zeta^2 \mapsto \eta^2$, где $\eta = \nabla F/(\zeta, \nabla F)$. Единственное отличие от классического случая состоит в том, что для получения действительной картины следует с помощью преобразования, обратного к (7), вернуться к исходным переменным n. Как обычно, волновому вектору, направленному вдоль бинормали, соответствует конус лучевых векторов (конус внутренней рефракции). Аналогичные замечания относятся и к внешней конической рефракции. В заключение приведем основные формулы, относящиеся к этому явлению. Именно, уравнение конуса внутренней рефракции в переменных η имеет вид

$$(\nu_k - \nu_i)\eta_k^2 + \left(\sqrt{\nu_i(\nu_j - \nu_k)}\eta_i - \sqrt{\nu_j(\nu_k - \nu_i)}\eta_j\right)\left(\sqrt{\frac{\nu_j - \nu_k}{\nu_i}}\eta_i - \sqrt{\frac{\nu_k - \nu_i}{\nu_j}}\eta_j\right) = 0,$$

а уравнение плоскости, касательной к лучевой поверхности есть

$$\sqrt{\nu_j(\nu_k - \nu_i)}\eta_i + \sqrt{\nu_i(\nu_j - \nu_k)}\eta_j = \sqrt{\nu_j - \nu_i}.$$

Соответствующие формулы для внешней рефракции получаются из них заменой $\nu_i \mapsto 1/\nu_i$, $i = 1, 2, 3$, $\eta \mapsto s$. Заметим, наконец, что у разных авторов существует разнобой в названиях. Например, в [2] приняты противоположные использованным здесь названия: поверхность нормалей следует считать лучевой поверхностью и наоборот, и это же относится к названиям внешней и внутренней рефракции. Когда базис фиксирован так, что диагональна матрица μ, все результаты остаются в силе, и поверхность нормалей соответствует классическому случаю [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973 (M. Born, E. Wolf. Principles of Optics, Fourth Edition, Pergamon Press, 1968).

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред, издание третье, исправленное, Москва, Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1992.

[3] Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, Изд-во АН БССР, 1958. (второе издание – Москва, УРСС, 2004).

[4] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, изд-во АН БССР, 1976.

[5] Гинзбург В. Л. УФН, **108**, вып. 4, 749 (1972).

[6] Федоров Ф. И. УФН, **108**, вып. 4, 762 (1972).

[7] Жура Н. А. Об одном классе гиперболических полиномов. Тезисы международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". М., Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН, 2005, 374 с.

[8] Hilbert D. Math. Ann. Bd., **32**, 342 (1888).

[9] Гильберт Д. Избранные труды, **1**, М., Факториал, 1998.

Поступила в редакцию 15 сентября 2005 г.