

УДК 953.951

БИФУРКАЦИЯ ПОЛНОЙ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПОЛЯ ПЯТОЙ ГАРМОНИКИ ПОЛЯ НАКАЧКИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ПЛАЗМЕ, ОБРАЗУЕМОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ ГАЗА ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

В. П. Силин, П. В. Силин

В рамках модели ионизации Бете рассмотрена зависимость степени круговой поляризации пятой гармоники поля накачки, генерируемой благодаря тормозному излучению, от величины напряженности электрического поля накачки, от степени его круговой поляризации и от главного квантового числа возбужденных состояний водородоподобных атомов газа, ионизируемого полем накачки. Обнаружено явление бифуркации полной круговой поляризации этой гармоники, что подтверждает высказанную нами ранее гипотезу об общности такого явления бифуркации для гармоник, генерируемых благодаря тормозному излучению в поле накачки, когда электроны плазмы осциллируют в таком поле. Ключевые слова: бифуркация, степень круговой поляризации, гармоники, возбужденные состояния водородоподобного атома.

Генерация гармоник излучения поля накачки в плазме изучается в течение многих лет [1]. В настоящем сообщении на основании модели тормозного излучения гармоник в поле накачки и модели ионизации Бете (см., например, [2]) мы сосредоточим свое внимание на степени круговой поляризации поля излучения гармоник. При этом, памятуя об ограниченной возможности публикации рисунков, ограничимся рассмотрением свойств пятой гармоники. Здесь мы установим нелинейные зависимости поля такой

гармоники от поляризации поля накачки и от величины напряженности электрического поля накачки. При этом наиболее интересным представляется возникающее при этом явление бифуркации полной круговой поляризации гармоник. Такое явление было установлено нами ранее для третьей гармоники [2, 3]. При этом была высказана гипотеза об общности такого явления при тормозной генерации гармоник. Настоящая статья подтверждает эту гипотезу.

Остановимся на том, в чем заключается явление бифуркации полной круговой поляризации гармоник. Напомним, что если степень круговой поляризации поля накачки A равна $+1$ или -1 , то величина E напряженности электрического поля с течением времени не меняется и генерация гармоник в дипольном приближении отсутствует. Однако уже при малом отличии A от $+1$ или -1 генерация гармоник становится возможной, степень их круговой поляризации оказывается мало отличающейся от $+1$ или -1 . В этом смысле значения степени круговой поляризации накачки $A = \pm 1$ являются такими значениями, которые представляют собой пределы генерации гармоник. В таких пределах поле гармоник стремится к полной круговой поляризации, но и одновременно стремится к нулю по интенсивности. При малых интенсивностях поля накачки степень круговой поляризации гармоники монотонно изменяется в зависимости от изменения степени круговой поляризации накачки и гармоника, строго говоря, нигде не становится полностью поляризованной по кругу. Однако это имеет место лишь при малых интенсивностях поля накачки. С его ростом положение меняется. При превышении некоторого порогового значения поля накачки $E_{th,pol}$, обусловленного нелинейной природой взаимодействия поля накачки с плазмой, картина качественно меняется. Именно, в работах [2, 3] было показано, что при превышении порогового значения интенсивности напряженности электрического поля накачки генерируемая третья гармоника может быть полностью поляризованной по кругу для определенных значений степени круговой поляризации при $-1 < A < +1$. При этом была высказана гипотеза об общности такого явления и для случая генерации других гармоник. Такое явление получило название бифуркации степени полной круговой поляризации. В работах [2, 3] для третьей гармоники было получено следующее выражение для порогового поля бифуркации $E_{th,pol}^{(3)} = 1.8445m\omega V_z(|e|n)^{-1}$, e и m – заряд и масса электрона, n – главное квантовое число возбужденного состояния водородоподобного атома газа, ионизацией которого получается плазма, $V_z = Ze^2/\hbar$ – кулоновская единица скорости [4], Z – зарядовое число ядра атома. Соответствующий порог для пятой гармоники установлен ниже.

Полностью ионизованную плазму будем рассматривать в поле накачки с напряженностью электромагнитного поля $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$:

$$E_x = e_x E \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad E_y = -e_y E \sin(\omega t - kz + \varphi). \quad (1)$$

Здесь E – действительная амплитуда напряженности электрического поля накачки, φ – фаза такого поля, ω и k его частота и волновой вектор, связанные соотношением $\omega^2 = \omega_{Le}^2 + c^2 k^2$, где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 N_e / m}$ – ленгмюровская частота электронов, а N_e – плотность числа электронов плазмы. Далее e_α ($\alpha = x, y$) – компоненты поляризационного вектора, удовлетворяющие соотношению $e_x^2 + e_y^2 = 1$.

Поскольку поляризационный тензор такого поля имеет вид [5]

$$R_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} e_x^2 & ie_x e_y \\ -ie_x e_y & e_y^2 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

то для параметров Стокса имеем $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = -2e_x e_y$, $\xi_3 = e_x^2 - e_y^2$. Ниже нас будут интересовать зависимости степени круговой поляризации 5-й гармоники от степени круговой поляризации поля основной гармоники (1), то есть поля накачки, $A = -2e_x e_y$. В общем случае гармоник степень их круговой поляризации $A[2N + 1]$ связана с их параметром Стокса соотношением $\xi_2^{(2N+1)} = A[2N + 1]$. Здесь $2N + 1$ – номер нечетной гармоники, генерируемой тормозным излучением в плазме полем накачки в нерелятивистском (дипольном) приближении.

Из уравнения (9) работы [2] для электромагнитного поля $(2N + 1)$ -й гармоники в предположении малости эффективных частот столкновений (см. ниже) по сравнению с частотой поля накачки можно получить:

$$E_x^{(2N+1)} = e_x E \frac{4\pi\sigma_{xx}^{(2N+1)}(2N+1)\omega}{\omega_{Le}^2 - (2N+1)^2(\omega^2 - c^2k^2)} \sin[(2N+1)(\omega t - kz)], \quad (3)$$

$$E_y^{(2N+1)} = e_y E \frac{4\pi\sigma_{yy}^{(2N+1)}(2N+1)\omega}{\omega_{Le}^2 - (2N+1)^2(\omega^2 - c^2k^2)} \cos[(2N+1)(\omega t - kz)], \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения для нелинейных комплексных проводимостей

$$\sigma_{xx}^{(2N+1)} = \frac{e^2 N_e \nu_{xx}^{(2N+1)}[n, E, \rho]}{m\omega^2}, \quad \sigma_{yy}^{(2N+1)} = \frac{e^2 N_e \nu_{yy}^{(2N+1)}[n, E, \rho]}{m\omega^2}. \quad (5)$$

При этом нелинейные эффективные частоты столкновений определяются формулами

$$\nu_{xx}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z N_e \Lambda}{\rho^3 m^2 V_E^3} D\alpha^{(+)}[2N + 1, \alpha, \rho] \Big|_{b=1}, \quad (6)$$

$$\nu_{yy}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z N_e \Lambda}{\rho^3 m^2 V_E^3} D\alpha^{(-)}[2N + 1, \alpha, \rho] \Big|_{b=1}. \quad (7)$$

Здесь использованы обозначения Λ – кулоновский логарифм, $\rho = \sqrt[4]{1 - A^2}$ – максимальная степень линейной поляризации поля накачки, $V_E = |eE|/m\omega$ – амплитуда осцилляции скорости электрона в поле накачки. Имея в виду l -вырождение, для оператора D имеем следующее выражение $D = 1 - \frac{d}{db} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{db^2}$. После применения этого оператора в выражениях (6) и (7) к функциям $\alpha^{(+)}$ и $\alpha^{(-)}$ принимается $b = 1$. Явные выражения этих функций $\alpha^{(+)}[2N + 1, \alpha, \rho]$ и $\alpha^{(-)}[2N + 1, \alpha, \rho]$ приведены в Приложении 1 для пятой ($N = 2$) гармоники. При этом $\alpha = (V_Z b / V_E n)$.

Приведенные выше формулы позволяют записать выражение для обсуждаемой ниже степени круговой поляризации $A[5, x, A]$ пятой гармоники, причем $x = nV_E/V_Z$ – безразмерная напряженность электрического поля накачки:

$$A[5, x, A] = 2 \text{Sign}[A] \frac{G[5, x, \rho] H[5, x, \rho]}{G^2[5, x, \rho] + H^2[5, x, \rho]}, \quad (8)$$

$$H[2N + 1, x, \rho] = \sqrt{\frac{1 + \rho^2}{2}} D\alpha^{(+)}(2N + 1, \alpha, \rho) \frac{1}{\rho^3 x^3}, \quad (9)$$

$$G[2N + 1, x, \rho] = \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{2}} D\alpha^{(-)}(2N + 1, \alpha, \rho) \frac{1}{\rho^3 x^3}, \quad (10)$$

где используется связь $\rho = (1 - A^2)^{1/4}$. Аналитическое выражение для формулы (8) громоздко. Поэтому в следующем разделе мы проиллюстрируем ее графиками.

На рис. 1 для иллюстрации качественных закономерностей приведена трехмерная проекция функции $A[5, x, A] \equiv A[5]$. На этом рисунке можно усмотреть, что в области малых значений аргумента x функция $A[5]$ плавно изменяется с изменением аргумента A во всем интервале его изменения. Напротив, при немалых значениях аргумента x функция $A[5]$ резко меняет свой знак в области малых значений аргумента A , резко изменяется от приблизительно своего минимального значения $A[5] \approx -1$, до максимального $A[5] \approx +1$. На рис. 2 приведена дополняющая рис. 1 трехмерная проекция $A[5, x, A]$. Для того, чтобы легче было представить зависимость степеней круговой поляризации пятой гармоники от степени круговой поляризации и от безразмерной амплитуды напряженности электрического поля накачки x , приведен рис. 3. На рис. 3

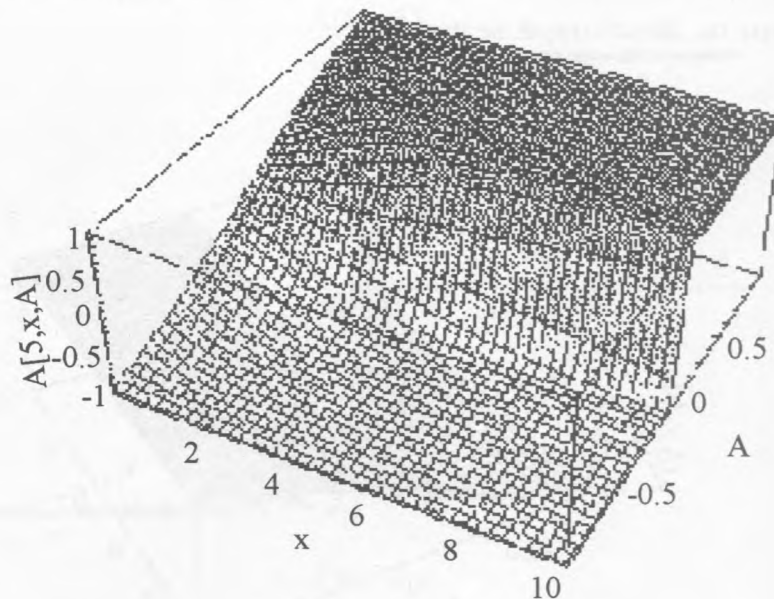


Рис. 1.

изображены пять кривых зависимости пятой гармоники от степени круговой поляризации накачки A . При этом точечная кривая отвечает значению безразмерной амплитуды напряженности электрического поля накачки $x = 1$, когда функция $A[5, x, A]$ монотонно и плавно нарастает от минимального значения -1 до максимального значения $+1$. Вторая сплошная кривая отвечает значению пороговой напряженности безразмерного электрического поля $x(5, th, pol) = 2.25$. Это значение отвечает порогу, который разделяет кривой $A[5, 2.25, A]$ небифуркационные и бифуркационные области кривых, то есть области с монотонной зависимостью, меняющейся от $A = -1$ до $A = +1$, от областей кривых с немонотонной зависимостью от степени круговой поляризации поля накачки. При этом в областях немонотонной зависимости приведены три кривые: кривая длинных пунктиров, отвечающая $x = 3.5$, кривая коротких пунктиров, отвечающая $x = 5$, и штрих-пунктирная кривая, отвечающая $x = 10$. Для всех них характерно то, что значение функции $A[5, x, A]$, равное -1 , достигается не только при $A = -1$, но и при большем отрицательном значении, зависящем от напряженности электрического поля накачки. Соответственно этим трем кривым значение функции $A[5, x, A]$, равное единице, достигается не только при $A = +1$, но и при меньшем положительном значении, также зависящем от напряженности электрического поля накачки. Отметим, что два новых значения степени круговой поляризации накачки, положительное и отрица-

тельное, при которых при данном x реализуется полная круговая поляризация пятой гармоники, равны по абсолютной величине.

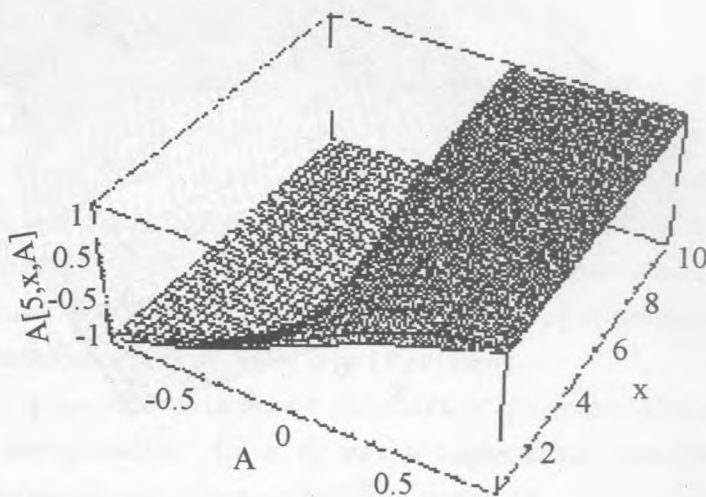


Рис. 2.

Обратим здесь внимание на то, что пороговая кривая, как и немонотонные кривые в широкой области значений степени круговой поляризации накачки, описывают зависимость, которая по величине при $A > 0$ близка к единице, а при $A < 0$ близка к минус единице. Иными словами в таких широких областях круговая поляризация пятой гармоники близка к полной поляризации по кругу. С ростом напряженности электрического поля накачки возникают области значений A , соответственно при положительных и отрицательных значениях степени круговой поляризации накачки, в которых на фоне близости поляризации к полностью круговой возникает отличие поляризации пятой гармоники от полной круговой. Для достаточно больших значений безразмерной напряженности электрического поля такое отличие становится вполне заметным. Наконец, как это видно из рис. 3, при достаточно больших значениях напряженности поля накачки сужается область значений степени круговой поляризации накачки, в которой степень круговой поляризации пятой гармоники меняется от -1 к $+1$. Это свойство резкого изменения круговой поляризации было заметно и на рис. 1.

Из рис. 1 и 2, а также из рис. 3 можно понять, что также как при значении $x(5, th, pol) = 2.25$, отвечающем порогу бифуркации пятой гармоники, реализующемся при $A = \pm 1$, также и значения $A[5, x, A] = \pm 1$, отвечающие полной круговой

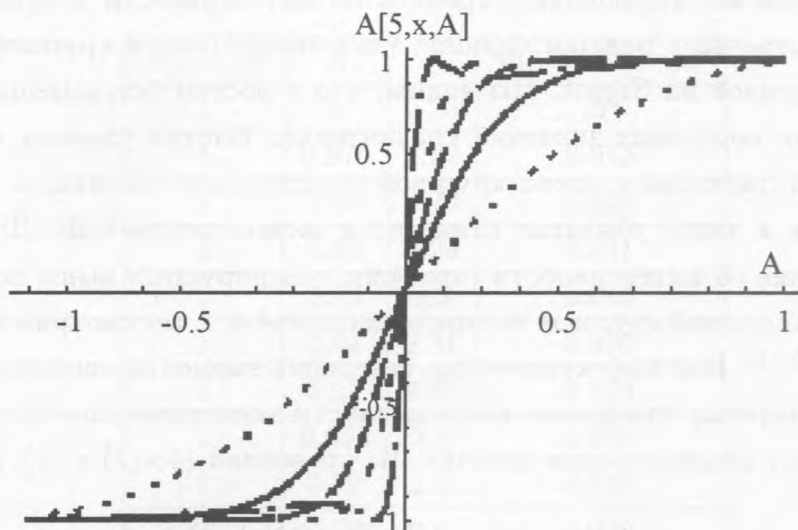


Рис. 3.

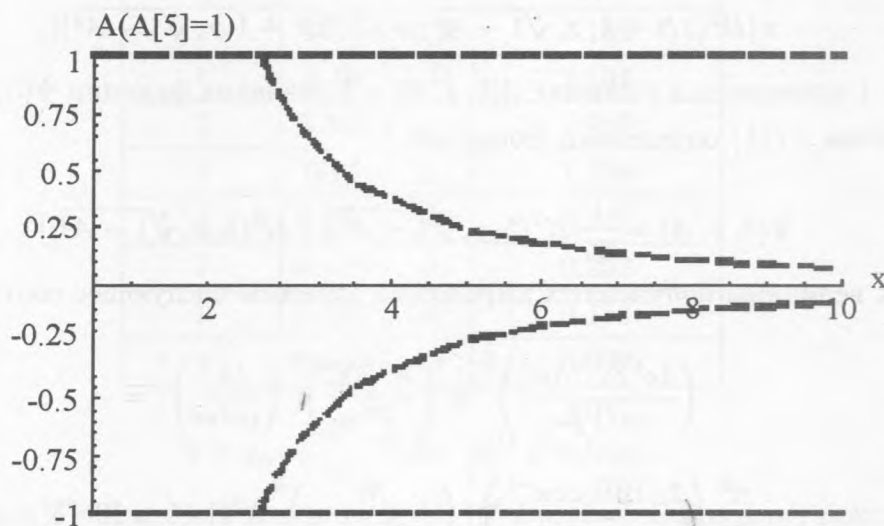


Рис. 4.

поляризации гармоник выше порога, реализуются при различных значениях безразмерного электрического поля накачки и соответственно степени круговой поляризации поля накачки. Однако эти значения связаны между собой закономерностями, которые иллюстрируют кривые рис. 4. На этом рисунке приведены кривые длинных пунктиров, отвечающие полной круговой поляризации пятой гармоники. При этом две параллельные прямые, отвечающие $A = +1$ и -1 , соответствуют предельным значениям A , к

которым стремятся все гармоники, стремясь по интенсивности к нулю. Точки двух других кривых отвечают равным единице значениям степени круговой поляризации гармоник, умноженной на $Sign A$. Мы видим, что с ростом безразмерного электрического поля вблизи пороговых значений сравнительно быстро убывает по абсолютной величине соответствующая степень круговой поляризации накачки, а при последующем возрастании x такое убывание становится весьма медленным. Для того, чтобы составилось мнение об интенсивности гармоник, генерируемых выше порога бифуркации и отвечающих полной круговой поляризации при $A < 1$, рассмотрим эффективность их генерации $\eta^{(2N+1)}$. Под эффективностью генерации гармоник понимается отношение усредненных по периоду квадратов напряженности электрического поля гармоники к соответствующему квадрату поля накачки. Из уравнений (3)–(7) и (9), (10) следует:

$$\eta^{(2N+1)} = \frac{(2N+1)^2}{N^2(N+1)^2} \left(\frac{4e^4 Z N_e \Lambda n^3}{m^2 V_Z^3 \omega} \right)^2 \times \\ \times [H^2(2N+1, x, \sqrt[4]{1-A^2}) + G^2(2N+1, x, \sqrt[4]{1-A^2})]. \quad (11)$$

В табл. 1 приведены в условиях $A[5, x, A] = 1$ значения функции $\Psi(5, x, A)$, которые в соответствии с (11) определены формулой

$$\Psi(5, x, A) = \frac{1}{36} [H^2(5, x, \sqrt[4]{1-A^2}) + G^2(5, x, \sqrt[4]{1-A^2})]. \quad (12)$$

Для оценок величины полученных выражений запишем следующее соотношение:

$$\left(\frac{4e^4 Z N_e \Lambda n^3}{m^2 V_Z^3 \omega} \right)^2 = \left(\frac{\Lambda n^3 N_e}{Z^2 \omega} \right)^2 \left(\frac{4\hbar^3}{m^2 e^2} \right)^2 = \\ = \frac{n^6}{Z^4} \left(\frac{2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}}{\omega} \right)^2 \left(\frac{N_e}{10^{17} \text{ см}^{-3}} \right)^2 \Lambda^2 (1.15 \times 10^{-6})^2. \quad (13)$$

В частности, при $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $N_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $n = 5$, $Z = 1$, $\Lambda = 6$ это выражение приближенно равно $0.73 \cdot 10^{-6}$. Следует напомнить, что проведенное рассмотрение отвечает модели ионизации Бете, когда согласно [2, 3] плотность потока энергии накачки должна удовлетворять неравенству

Т а б л и ц а 1

$A[5, x, A]$	A	x	$\Psi(5, x, A) \times 10^6$
1	1	2.25	0
1	0.975	2.27	0.012
1	0.97	2.28	0.018
1	0.96	2.29	0.031
1	0.95	2.3	0.049
1	0.94	2.31	0.070
1	0.91	2.35	0.153
1	0.875	2.4	0.284
1	0.82	2.5	0.539
1	0.72	2.7	1.099
1	0.60	3	1.74
1	0.53	3.25	1.923
1	0.45	3.5	2.182
1	0.40	3.75	2.104
1	0.358	4	1.959
1	0.24	5	1.258
1	0.137	7	0.422
1	0.110	8	0.252
1	0.092	9	0.156
1	0.075	10	0.099

$$q > q_B = \frac{Z^6}{n^8} \cdot 1.37 \cdot 10^{14} \text{ Вт/см}^2. \quad (14)$$

В частности, при $Z = 1$ и $n = 5$ имеем $q_B = 3.5 \cdot 10^8 \text{ Вт/см}^2$. Приведем также выражения пороговых значений потока энергии излучения накачки, отвечающих возникновению бифуркации полной круговой поляризации гармоник соответственно для третьей и пятой гармоник:

$$q_{th,p}^{(3)} \approx \frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{\hbar\omega}{1\text{эВ}} \right)^2 1.7 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2, \quad q_{th,p}^{(5)} \approx \frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{\hbar\omega}{1\text{эВ}} \right)^2 2.4 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2, \quad (15)$$

В частности, при $\hbar\omega = 1\text{эВ}$, $Z = 1$, $n = 5$ имеем $q_{th,p}^{(5)} \approx 10^{13} \text{ Вт/см}^2$. Очевидно, что это значение весьма превышает q_B , то есть отвечает неравенству Бете (14).

Дадим теперь численную оценку плотности потока энергии пятой гармоники. Функция $\Psi[5, x, A]$ достигает максимума при превышении порога бифуркации по плотности потока энергии накачки примерно в 2.4 раза, что составляет примерно $2.4 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2$. Используя приведенную выше оценку выражения (13) и величину $\Psi_{max}[5, x, A] \approx 0.2 \times 10^{-5}$, получаем для эффективности генерации пятой гармоники значение $9.75 \cdot 10^{-10}$, а для плотности потока энергии пятой гармоники находим $\sim 950 \text{ Вт/см}^2$.

Для сравнения приведем соответствующую оценку для третьей гармоники. Поскольку функция $\Psi[3, x, A]$ достигает согласно Приложению 2 максимума при превышении порога бифуркации по плотности потока энергии примерно в 1.55 раза, то соответствующая такому максимуму плотность потока энергии накачки составляет при используемых выше параметрах примерно $4.4 \cdot 10^{12} \text{ Вт/см}^2$. Поскольку $\Psi_{max}[3, x, A]$ согласно табл. 2 равно примерно $3.4 \cdot 10^{-4}$, и в соответствии с приведенной выше оценкой выражения (13) ($0.73 \cdot 10^{-6}$), то для эффективности генерации третьей гармоники находим значение $2 \cdot 10^{-8}$. Соответственно для плотности потока энергии третьей гармоники находим $\sim 9 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2$.

Т а б л и ц а 2

$A[3, x, A]$	A	x	$\Psi(3, x, A) \times 10^4$
1	1	1.8445	0
1	0.97	1.89	0.553
1	0.945	1.9	1.011
1	0.905	1.95	1.620
1	0.865	2	2.141
1	0.67	2.3	3.427
1	0.57	2.5	3.413
1	0.42	3	2.404
1	0.26	4	0.990
1	0.17	5	0.420
1	0.13	6	0.197
1	0.08	8	0.053
1	0.05	10	0.018

Подводя итог всему вышеизложенному, прежде всего укажем, что для пятой гармоники теоретически установлено явление бифуркации полной круговой поляризации этой гармоники, что подтверждает гипотезу работ [2,3] об общности такого явления

для гармоник, генерируемых благодаря тормозному излучению в плазме. Продемонстрирована скейлинговая зависимость поляризации гармоник от безразмерного поля $x = nV_E/V_Z$, что определяет зависимость степени круговой поляризации гармоник от главного квантового числа электронов водородоподобных атомов газа, ионизацией которых образуется плазма. При этом благодаря электронным столкновениям проявление зависимости от n прекращается для импульсов с длительностью большей $\tau_n \sim 2 \cdot (N_e/10^{17} \text{ см}^{-3})^{-1} (Z^2 n^{-3}) \times 10^8 \text{ ссек}$, то есть при $Z = 1, n = 5$ и $N_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ имеем $\tau_n \sim 1.6 \times 10^{-11} \text{ ссек}$. В заключение подчеркнем здесь тот установленный нами факт, что, начиная от околопороговой области значений плотности потока энергии накачки и при больших значениях, круговая поляризация гармоник близка к полной вне области весьма малых значений степени круговой поляризации накачки. При этом область таких малых значений степени круговой поляризации поля накачки убывает с ростом плотности потока энергии накачки. Это свойство весьма характерно для тормозного механизма генерации гармоник.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 05-02-16897), программы ведущих научных школ Российской Федерации (грант N НШ-1385.2003.2) и ИНТАС (грант N 05-51-5037).

Приложение 1

Приведем здесь значение функций $\alpha^{(+)}[5, \alpha, A]$, $\alpha^{(-)}[5, \alpha, A]$, полученные в работе [6]

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)} \left[5, \frac{b}{x}, \rho \right] &= \frac{4b}{x\rho} \left(-\frac{2}{5} + \frac{8}{5\rho^2} + \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} + \left(-\frac{2}{15} - \frac{8}{5\rho^2} - \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} \right) \sqrt{\frac{2b^2 + x^2 - x^2\rho^2}{2b^2 + x^2 + x^2\rho^2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} 2^{3/2} \rho \left[\left(\frac{3}{10} - \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{3\rho^2} \right) E(\arctg \sqrt{\frac{x^2(1 + \rho^2)}{2b^2}}, \sqrt{\frac{2\rho^2}{1 + \rho^2}}) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{5\rho^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times F \left(\arctg \sqrt{\frac{x^2(1 + \rho^2)}{2b^2}}, \sqrt{\frac{2\rho^2}{1 + \rho^2}} \right) \right], \\ \alpha^{(-)} \left[5, \frac{b}{x}, \rho \right] &= \frac{1}{15\rho^3(1 - \rho^2)} \left\{ \frac{8b}{x} (1 - \rho^2) \left(12 + 3\rho^2 + \frac{8b^2}{x^2} \right) + \left[\frac{6b}{x} \sqrt{\frac{2b^2 + x^2 + x^2\rho^2}{2b^2 + x^2 - x^2\rho^2}} (4 - 2\rho^2 - \rho^4 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{16b^2}{x^2} + \frac{16b^4}{x^4}) - \frac{2b}{x} \sqrt{\frac{2b^2 + x^2 - x^2\rho^2}{2b^2 + x^2 + x^2\rho^2}} \left(60 - 2\rho^2 - 19\rho^4 + \frac{80b^2}{x^2} + \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{48b^4}{x^4} \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{2}\sqrt{1+\rho^2}(-32+20\rho^2+9\rho^4)E\left(\arctg\sqrt{\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2}},\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) - \\
& -\frac{\sqrt{2}(1-\rho^2)}{\sqrt{1+\rho^2}}(-32-12\rho^2+5\rho^4)F\left(\arctg\sqrt{\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2}},\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\Bigg\},
\end{aligned}$$

где $E[\varphi, k]$ и $F[\varphi, k]$ – эллиптические функции, определенные согласно [7].

Приложение 2

Здесь для возможности сравнения полученных результатов с найденными нами ранее результатами для третьей гармоники приведена табл. 2 значений функции $\Psi(3, x, A)$, полученных на основании расчетов работы [2]. Подобно формуле (12),

$$\Psi(3, x, A) = \frac{1}{4}[H^2(3, x, \sqrt[4]{1-A^2}) + G^2(3, x, \sqrt[4]{1-A^2})].$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С и л и н В. П. ЖЭТФ, **47**, 2254 (1964).
- [2] С и л и н В. П., С и л и н П. В. Квантовая электроника, **35** (6), 531 (2005).
- [3] С и л и н В. П., С и л и н П. В. Украинский физический журнал, **50**, (8A)A10 (2005).
- [4] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Квантовая механика, нерелятивистская теория. М., ГИФМЛ, 1963.
- [5] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.
- [6] С и л и н В. П., С и л и н П. В. Квантовая электроника, **35** (2), 157 (2005).
- [7] Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.

Поступила в редакцию 26 декабря 2005 г.