УДК 539.211: 621.3

ДВУМЕРНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПЛАСТИНАХ С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Ф. Х. Мирзаде, Л. А. Шелепин

Выведены двумерные уравнения движения физически и геометрически нелинейно-упругой пластины с учетом взаимодействия полей деформации и концентрации неравновесных лазерно-индуцированных точечных дефектов. Полученные уравнения методом возмущений редуцируются к нелинейному эволюционному уравнению Кадомцева–Петвиашвили–Бюргерса для продольной компоненты деформации. Приведено точное решение этого уравнения, описывающее распространение двумерных уединенных волн. Рассматриваются условия, когда формируются ударно-волновые структуры деформации пластины.

Одним из важных направлений исследований в нелинейной волновой динамике является изучение процессов генерации и распространения нелинейных волн деформаций в конденсированных средах при интенсивных внешних воздействиях (лазерное и электронно-лучевое воздействия, высокоскоростное нагружение и т.д.) [1 – 7]. Существование этих волн обычно связывается с наличием баланса двух конкурирующих процессов: расплывания из-за дисперсии среды и опрокидывания нарастающего фронта волны из-за нелинейности упругой системы. Дисперсия может быть обусловлена как геометрическими размерами системы (конечностью периода решетки [8] или толщиной образца [6]), так и ее молекулярной структурой [3], неоднородностями среды. В качестве нелинейности рассматриваются нелинейные связи между деформациями и градиентами смещений (геометрическая нелинейность), деформациями и напряжениями (физическая нелинейность).

Значительную роль в динамике нелинейных волн деформаций могут играть неравновесные атомные точечные дефекты (ТД) (вакансии и междоузельные атомы) – элементарные дефекты кристаллического строения, генерирующиеся в процессе воздействия интенсивных внешних потоков энергий на конденсированные системы. Большая концентрация ТД в среде приводит к возникновению значительных внутренних механических (концентрационных) напряжений. Эти напряжения возникают вследствие искажений (деформации) решетки вблизи дефектов, связанных с разрывом атомных связей. Генерирующиеся ТД могут диффундировать по кристаллу, рекомбинировать на неоднородностях в объеме (или выйти на поверхность) и друг с другом (взаимная рекомбинация). Возникающие при этом неоднородные распределения концентрации ТД создают силы, пропорциональные их градиентам, дополнительно деформирующие решетку.

Наличие в среде неравновесных ТД с большой концентрацией и их взаимосвязь с полями деформаций могут оказаться существенными для эволюции нелинейных упругих возмущений в конденсированных средах и приводить к новым физическим эффектам [9]. Так, обусловленные дефектами физические нелинейности могут приводить к появлению релаксационных вкладов в решеточные параметры (как в линейные, так и нелинейные модули упругости). Наличие в среде дефектов с конечной скоростью релаксации может вызывать появление диссипативных и дисперсионных слагаемых, отсутствующих в обычных уравнениях для упругих нелинейных волн.

Распространение уединенных волн деформаций в пластинах без учета их взаимодействия с полями дефектов структуры обсуждалось в [5 – 7]. В работах [10 – 16] рассматривались модели эволюции одномерных нелинейных продольных волн деформаций в средах с учетом взаимодействия с неравновесными ТД. Было проанализировано влияние деформационно-активированных процессов диффузии, генерации и рекомбинации дефектов на характер распространения слабонелинейных возмущений упругой деформации, на их дисперсионные и диссипативные свойства.

Данная работа посвящена исследованию распространения двумерных (2М) волн деформаций в нелинейно-упругой пластине, находящейся под воздействием внешних потоков энергии, генерирующих ТД. Исходя из принципа Гамильтона, выведена система управляющих уравнений для описания эволюции компонент вектора поля смещений с учетом его взаимодействия с подсистемой дефектов за счет деформационного потенциала. Далее полученные уравнения движения методом асимптотических разложений сводятся к обобщенному нелинейному эволюционному уравнению Кадомцева–Петвиашвили–Бюргерса (КПБ), для которого определяется точное решение, описывающее распространение продольных 2М уединенных волн деформаций. Исследуются условия формирования структур в виде ударно-волновых фронтов поля деформации в пластине.

Уравнения движения пластины с неравновесными дефектами. Рассматривается бесконечная изотропная пластина, занимающая область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h < z < h$, в координатах (x, y, z). Пусть в ней под воздействием внешних потоков энергий (например, лазерного излучения) генерируются ТД с объемной концентрацией $n^{(j)}(x, y, z, t)(j = V$ – для вакансий, $j = I$ – для междоузельных атомов). Обозначим через $q^{(j)}$ и $r^{(j)}$, соответственно, функцию источника ТД типа j и скорость их рекомбинации на центрах. Введем систему лагранжевых декартовых координат $X(x, y, z)$, так что срединная плоскость пластины описывается уравнением $z = 0$, а боковые поверхности – уравнениями $z = \pm h$. При симметричных по толщине колебаниях пластины и невысоких частотах ($\omega h c_t^{-1} < 2$, ω – циклическая частота, $2h$ – толщина пластины, c_t – скорость сдвиговой волны) компоненты (u_1, u_2, u_3) вектора смещений $\bar{u}$ точек пластины могут быть представлены в виде [5]:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t);\ u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t);\ u_3(x, y, z, t) = zw(x, y, t),$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ – функции, характеризующие перемещения в срединной плоскости по осям x и y, $w(x, y, t)$ – перемещения по оси z.

Компоненты тензора деформаций u_{ij} имеют вид [5, 17, 18]: $u_{11} = u_x + 1/2(u_x^2 + v_x^2 + z^2 w_x^2)$, $u_{12} = 1/2(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + z^2 w_x w_y)$, $u_{13} = 1/2 z^2 w_x + 1/2 z w w_x$, $u_{22} = v_y + 1/2(u_y^2 + v_y^2 + z^2 w_y^2)$, $u_{23} = 1/2 z w_y + 1/2 z w w_y$, $u_{33} = k_0 w + 1/2 w^2$, где $k_0 = \pi^2/12$ – поправочный коэффициент [19].

Для получения уравнений движения пластины воспользуемся принципом Гамильтона, согласно которому искомые уравнения получаются из условия экстремума функционала (S):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-h}^{h} dz \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L dx dy = 0, \tag{1}$$

где L – плотность Лагранжиана единицы объема, $L = W - U$, U – плотность потенциальной энергии деформации в пластине, задаваемая как функция компонент тензора деформаций и концентрации ТД:

$$U = U_{elas} + U_d,\ U_{elas} = \frac{1}{2}\lambda(u_{ll})^2 + \mu u_{ik}u_{ki} + \frac{1}{6}\nu_1 u_{ll}^3 + \nu_2 u_{nn}u_{ik}u_{ki} + \frac{4}{3}\nu_3 u_{ik}u_{kn}u_{ni},$$

$$U_d = -\vartheta_m^{(j)} n^{(j)} u_{ll}, \tag{2}$$

W – плотность кинетической энергии: $W = \rho/2\lfloor(\partial u/\partial t)^2 + (\partial v/\partial t)^2 + z^2(\partial w/\partial t)^2\rfloor$, λ, μ – линейные модули упругости, ν_1, ν_2, ν_3 – нелинейные модули упругости третьего порядка, ρ – плотность; $\vartheta_m^{(j)}$ – деформационный потенциал. В (2) U_{elas} – плотность энергии упругого континуума, U_d – плотность энергии дефектно-деформационного взаимодействия.

Тензор упругих напряжений пластины с учетом генерации ТД запишем в виде

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu u_{ik} + O(u_{ik}^2) - \vartheta_m^{(j)} n^{(j)}\delta_{ik}, \tag{3}$$

где σ_{ik}, u_{ik} – соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций; δ_{ik} – символы Кронекера; $O(u_{ik}^2)$ включает в себя нелинейные члены, описывающие отклонения от закона Гука. Последнее слагаемое в (3) учитывает концентрационное напряжение, обусловленное генерацией неравновесных дефектов.

Согласно термофлуктуационному механизму образования ТД, скорость их генерации на узлах кристаллической решетки определяется температурой среды и упругими напряжениями, и поэтому может изменяться под влиянием распространяющихся возмущений упругой деформации. Поле деформации в упругой волне воздействует на характеристики самих ТД. При распространении деформации в областях растяжения и сжатия изменяется энергия образования дефектов. В линейном по деформации приближении перенормированную энергию образования дефектов можно представить в виде: $E_f^{(j)} = E_{f0}^{(j)} - \vartheta_d^{(j)} u_{ll}$ ($E_{f0}^{(j)}$ – энергия образования дефектов типа j в недеформированном кристалле, $\vartheta_d^{(j)}$ – деформационный потенциал). Одновременно с уменьшением энергии образования дефектов, при возникновении деформации решетки происходит и уменьшение энергии миграции дефектов $E_m^{(j)} = E_{m0}^{(j)} - \vartheta_m^{(j)} u_{ll}$ ($E_{m0}^{(j)}$ – энергия миграции в отсутствие деформации, $\vartheta_m^{(j)} = K\Omega_m^{(j)}$, K – модуль всестороннего сжатия, $\Omega_m^{(j)}$ – дилатационный параметр, характеризующий деформацию решетки при образовании в ней одного ТД типа j, причем для $j = V - \Omega_m^{(j)} < 0$, для $j = I - \Omega_m^{(j)} > 0$), что приводит к возрастанию коэффициента диффузии дефектов. Модуляции энергий образования и миграции приводят к соответствующим модуляциям функции источника $(q^{(j)})$ и скорости рекомбинации ТД $(r^{(j)})$,

$$q^{(j)} = q_0^{(j)} + q_{u_{ll}}^{(j)} u_{ll},\ r_j^{(j)} = r_0^{(j)} + r_{u_{ll}}^{(j)} u_{ll} \tag{4}$$

($q_0^{(j)}$ и $r_0^{(j)}$ – значения функции источника и скорости рекомбинации в отсутствие деформации; индекс "u_{ll}" означает производную по u_{ll}) и как следствие, к их пространственному перераспределению [9].

Примем, что основными процессами, контролирующими поведение во времени концентрации ТД являются их термофлуктуационная генерация на узлах решетки и рекомбинация на центрах различной природы. Тогда для слабых неоднородных возмущений концентрации $n_1^{(j)} = n^{(j)} - n_0^{(j)}$, $n_1^{(j)} \ll n_0^{(j)}$, где $n_0^{(j)} = q_0 \tau_d^{(j)}$ – стационарное однородное распределение ТД, можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial n_1^{(j)}}{\partial t} = (q_{u_{ll}}^{(j)} - r_{u_{ll}}^{(j)} n_0^{(j)}) u_{ll} - \frac{n_1^{(j)}}{\tau_d^{(j)}}, \tag{5}$$

где первые два слагаемых в правой части учитывают деформационно-индуцированные процессы генерации и рекомбинации ТД, $r_{u_{ll}}^{(j)} = r_0^{(j)} \vartheta_m^{(j)} / k_B T$ (k_B – постоянная Больцмана, T – температура), третье слагаемое – уменьшение концентрации дефектов за счет их ухода на свободную поверхность пластины или рекомбинации на внутренних неоднородностях (кластерах, границах зерен, примесях и т.д.) в отсутствие деформации. Скорость рекомбинации дефектов $r_0^{(j)}$ связана со временем их релаксации $\tau_d^{(j)}$ формулой: $r_0^{(j)} = 1/\tau_d^{(j)} = D^{(j)}(\sum_s Z_s^j \rho_s + 4/h^2)$, где $D^{(j)}$ – коэффициент диффузии дефекта типа j в отсутствие деформации, ρ_s – плотность центров рекомбинации; Z_s^j характеризует эффективность поглощения дефектов типа j центром типа s. Согласно термофлуктуационному механизму генерации ТД, для $q_{u_{ll}}^{(j)}$ имеем: $q_{u_{ll}}^{(j)} = q_0(\vartheta_d^{(j)}/k_{ll}T)$, $q_0 = d_0^3 \omega_0 N_0^2 \exp\lfloor -E_{f0}^{(j)}/k_B T \rfloor$ (ω_0 – частота колебаний атомов, N_0 – концентрация узлов решетки).

В дальнейшем ограничимся системой с одним типом ТД и положим в (2) – (5), $n_1^{(j)}(x,y,t) \equiv n_1(x,y,t)$, $\tau_d^{(j)} \equiv \tau_d$, $\Omega_m^{(j)} \equiv \Omega_m$ и т. д.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (5) с учетом граничного условия $n_1(\pm\infty, t) = 0$, имеет вид

$$n_1(x,y,z,t) = (q_{u_{ll}} - r_{u_{ll}} n_0) \int_{-\infty}^{t} d\zeta\, u_{ll}(\zeta) \exp\left(\frac{\zeta - t}{\tau_d}\right). \tag{6}$$

Из (6) следует, что концентрация дефектов в данный момент времени складывается из числа дефектов, появившихся на узлах решетки в предыдущие моменты времени с учетом экспоненциального уменьшения их числа за счет рекомбинации. После подстановки (6), уравнение состояния упругой среды запишем в виде

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{11}\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}(t) + O(u_{ik}^2) - \delta_{ik} b_0 \int\limits_{-\infty}^{t} d\zeta u_{11}(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta - \tau}{\tau_d}\right), \tag{7}$$

где $b_0 = q_0 \vartheta_m(\vartheta_d - \vartheta_m)/k_B T$.

После вычисления вариаций тензора деформаций (δu_{ik}) и компонент вектора смещений (δu_i), затем компонент тензора напряжений (σ_{ik}) из уравнения состояния (7) и подстановки найденных выражений в функционал (1), из последнего в силу произвольности вариаций δu_i после интегрирования по переменной z получаем систему интегродифференциальных уравнений движения пластины с генерацией неравновесных дефектов. Для u компоненты вектора смещения имеем уравнение:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} + \lambda k_0 w_x + (3\lambda + 6\mu + \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)u_x u_{xx} + \\
&+ (\lambda + \mu)\left[v_x v_{xx} + \frac{2}{3}h^2 w_x w_{xx} + (u_y^2)_x\right] + \lambda\left[2v_y v_{xy} + \frac{2}{3}h^2 w_y w_{xy} + (v_y u_x)_x + \right. \\
&\left. + \frac{2}{3}h^2 w_x w_{xx} + w w_x + k_0(u_x w)_x + k_0 u_{yy} w\right] + \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y + \frac{1}{3}h^2 w_x w_y + u_x v_x) + \right. \\
&\left. + (u_y v_x)_x + 2u_x u_{yy}\right] + (\nu_1 + 2\nu_2)\frac{\partial}{\partial x}\left[u_x(v_y + k_0 w) + \frac{1}{2}(v_y^2 + k_0 w^2)\right] + \\
&+ \left(\frac{1}{2}\nu_2 + \nu_3\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y^2 + v_x^2 + \frac{1}{3}h^2(w_x^2 + w_y^2)\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}[u_y(u_x + v_y + k_0 w)]\right\} + \\
&+ 2(\nu_2 + \nu_3)\left\{(u_y v_x)_x + \frac{\partial}{\partial y}[v_x(u_x + v_y + k_0 w)]\right\} + \nu_1 k_0 \frac{\partial}{\partial x}(v_y w) - 2\nu_3 k_0 \frac{\partial}{\partial y}(v_x w) + \\
&+ (u_{xx} + u_{yy})I_1 + (1 + u_x)\frac{\partial}{\partial x}(I_1) + u_y \frac{\partial}{\partial y}(I_1),
\end{aligned} \tag{8}$$

а для w компоненты:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\lambda k_0(u_x + v_y) - (\lambda + 2\mu)k_0 w\left(k_0 + \frac{3}{2}w\right) + \frac{1}{3}\mu h^2(w_{xx} + w_{yy}) + \\
&+ \frac{1}{3}h^2(\lambda + 2\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(w_x u_y)\right] + \frac{1}{3}\lambda h^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(w_y u_x)\right] +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\mu h^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_y u_y + w_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(w_x u_y + w_x v_x) + 2\frac{\partial}{\partial x}(w w_x) - 2\frac{\partial}{\partial y}(w w_y) - w_x^2 - w_y^2\right] -$$

$$-\frac{\lambda}{2}\left[k_0\left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{3}h^2(w_x^2 + w_y^2)\right) + 2w(u_x + v_y)\right] + \left(\frac{1}{2}\nu_1 + 3\nu_2 + 4\nu_3\right)k_0^2 w^2 -$$

$$-(\nu_1 + 2\nu_2)\left[k_0^2 w(u_x + v_y) + \frac{1}{2}k_0(u_x^2 + v_y^2)\right] + \frac{1}{3}h^2\left(\frac{1}{2}\nu_2 + \nu_3\right)\left\{2\frac{\partial}{\partial x}[w_x(u_x + v_y + k_0 w)] + \right. \tag{9}$$

$$\left. +2\frac{\partial}{\partial y}[w_x(u_x + v_y + k_0 w)]\right\} - 3\frac{k_0}{h^2}(u_y^2 + v_x^2) - k_0(w_x^2 + w_y^2) - 2\nu_2 k_0 u_y v_x -$$

$$-\nu_1 u_x v_y - (k_0 + w)I_1 + \frac{\partial}{\partial x}(w_x I_2) + \frac{\partial}{\partial y}(w_y I_2),$$

где введены следующие обозначения:

$$I_1(x,y) = -Kb_0(2h)^{-1}\int\limits_{-h}^{h} dz \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-r_0(t-\tau)} u_{ll}(\tau)d\tau,$$

$$I_2(x,y) = -Kb_0(2h)^{-1}\int\limits_{-h}^{h} z^2 dz \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-r_0(t-\tau)} u_{ll}(\tau)d\tau \tag{10}$$

(индексы в системе уравнений (8) и (9) определяют производные по соответствующим пространственным переменным).

Уравнение для v можно получить, заменяя в (8) u на v, v на u и x на y, y на x. Уравнения (8) и (9) без интегральных слагаемых совпадают с полученными в работе [5].

Вывод эволюционного уравнения продольной компоненты деформации. Рассмотрим распространение продольных длинных волн малой, но конечной амплитуды, вводя малый параметр, характеризующий нелинейность волнового процесса: $\epsilon = a(\nu_1 + 6\nu_2 - 8\nu_3 + 3\lambda + 6\mu)/\Lambda(\lambda + 2\mu) \ll 1$, где a – амплитуда колебаний, Λ – длина волны.

Заменим внутренние интегральные операторы в (10) дифференциальными, разлагая функцию $u_{ll}(\tau)$, в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, сохраняя в полученном разложении первые два слагаемых, что справедливо для времен $t \gg r_0^{-1}$. В результате получим:

$$I_1(x,y) = \frac{b_0}{2hr_0}K\left[-\int\limits_{-h}^{h} u_{ll}dz + \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{-h}^{h} u_{ll}dz\right)\right],$$

$$I_2(x,y) = \frac{b_0}{2hr_0} K \left[-\int\limits_{-h}^{h} u_{ll} z^2 dz + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int\limits_{-h}^{h} u_{ll} z^2 dz \right) \right].$$

Учтем эти выражения в (10) и (11) и исследуем полученные уравнения асимптотическим методом. Перейдем в полученных уравнениях к новым безразмерным переменным

$$u' = \frac{u}{a},\ v' = \frac{v}{a},\ w' = \frac{w}{h},\ \xi = \frac{x}{\Lambda} - \frac{c}{\Lambda} t,\ \eta = \sqrt{\epsilon} \frac{y}{\Lambda},\ \chi = \epsilon \frac{x}{\Lambda}. \tag{11}$$

Выбор переменных в виде (11) учитывает различие масштабов изменения параметров волны вдоль осей x и y. Физически это означает, что благодаря нелинейности и дисперсии, возмущения, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционируют в продольном (x) и поперечном (y) направлениях.

Представим неизвестные функции асимптотическими разложениями по малому параметру ϵ, опуская штрихи при соответствующих безразмерных переменных:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + ...,\ v = \sqrt{\epsilon}(v_1 + v_2 + ...),\ w = w_0 \epsilon + w_1 \epsilon^2 + ... \tag{12}$$

Обезразмеренные уравнения (8) и (9), кроме ϵ, содержат еще два малых параметра: $\epsilon_1 = h^2(\lambda+\mu)/3\Lambda^2(\lambda+2\mu) = O(\epsilon)$, $\epsilon_2 = b_0 c/r_0^2 \Lambda = O(\epsilon)$, где ϵ_1 характеризует дисперсию, обусловленную движениями, нормальными к серединной плоскости пластины, а ϵ_2 учитывает взаимодействие поля деформации с подсистемой дефектов.

Подставим разложения (12) в безразмерные уравнения пластины. Тогда, в нулевом порядке по малому параметру ϵ, получим систему уравнений:

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi} = (\tilde{\lambda} + 2\mu) u_{0\xi\xi} + \tilde{\lambda} k_0 w_{0\xi}, \tag{13}$$

$$\tilde{\lambda} u_{0\xi} + (\tilde{\lambda} + 2\mu) k_0 w_0 = 0. \tag{14}$$

Из (14) находим следующую связь между продольной и нормальной составляющими деформации

$$w_0 = -\frac{\tilde{\lambda}}{k_0(\tilde{\lambda} + 2\mu)} u_{0\xi},\ \tilde{\lambda} = \lambda(1 - b_0/r_0). \tag{15}$$

После подстановки (15) в (13) для скорости продольной волны имеем: $c = \sqrt{(\tilde{\lambda} + 2\mu - \tilde{\lambda}^2/(\tilde{\lambda}+2\mu))/\rho}$.

Для членов со степенями ϵ и $\epsilon^{1/2}$ получим систему трех уравнений

$$2(\tilde{\lambda}+2\mu)u_{0\xi\chi}+(\tilde{\lambda}+\mu)v_{1\xi\eta}+\mu u_{0\eta\eta}+\tilde{\lambda}k_0w_{0\chi}+(3\tilde{\lambda}+6\mu+\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)\epsilon^{-1}u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+ \tag{16}$$

$$+\tilde{\lambda}w_0w_{0\xi}+\tilde{\lambda}k_0(u_{0\xi}w_0)_\xi+\frac{2\mu b_0c}{3r_0^2\Lambda\epsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-k_0w_{0\xi\xi})=-\tilde{\lambda}k_0w_{1\xi}+\rho c^2u_{1\xi\xi}-(\tilde{\lambda}+2\mu)u_{1\xi\xi},$$

$$\rho c^2v_{1\xi\xi}=(\tilde{\lambda}+\mu)u_{0\xi\eta}+\mu v_{1\xi\xi}+\tilde{\lambda}k_0w_{0\eta}=0, \tag{17}$$

$$\rho\frac{c^2h^2}{12\epsilon\Lambda^2}w_{0\xi\xi}=-\tilde{\lambda}k_0(u_{0\chi}+v_{1\eta})+\frac{\mu h^2}{3\epsilon l^2}w_{0\xi\xi}-\frac{1}{2}[\tilde{\lambda}+2\mu+k_0^2(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)]\epsilon^{-1}k_0w_0^2-$$

$$-(\nu_1+2\nu_2)\epsilon^{-1}(k_0^2u_{0\xi}w_0+1/2k_0u_{0\xi}^2)-\frac{\mu h^2}{3\epsilon\Lambda^2}w_{0\xi\xi}-\frac{3}{2}(\tilde{\lambda}+2\mu)k_0w_0^2- \tag{18}$$

$$-\frac{1}{2\epsilon}\tilde{\lambda}(k_0u_{0\xi}^2+2w_0u_{0\xi})-\tilde{\lambda}k_0(u_{1\xi}+k_0w_1)-2\mu k_0^2w_1+\frac{2\mu b_0c}{3\epsilon r_0^2\Lambda}(k_0u_{0\xi\xi}-2k_0^2w_{0\xi}).$$

Интегрируя уравнение (17) по переменной ξ и используя (15), получаем связь между сдвиговыми деформациями в волне: $v_{1\xi}=u_{0\eta}$. С учетом этого соотношения, а также (15), уравнение (18) после его дифференцирования по ξ, запишем в виде:

$$\lambda k_0u_{1\xi\xi}+k_0^2(\tilde{\lambda}+2\mu)w_{1\xi}=\frac{1}{3}\frac{\tilde{\lambda}h^2(\rho c^2-\mu)}{\tilde{\lambda}+2\mu}u_{0\xi\xi\xi\xi}-\tilde{\lambda}k_0u_{0\xi\chi}-\tilde{\lambda}k_0u_{0\eta\eta}-$$

$$-[\tilde{\lambda}k_0^2(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)+\tilde{\lambda}^2+2\tilde{\lambda}\mu-(\tilde{\lambda}+k_0\nu_1+2k_0\nu_2)(\tilde{\lambda}-2\mu)](\tilde{\lambda}+2\mu)^{-1}\epsilon^{-1}u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+ \tag{19}$$

$$+\frac{2\mu b_0ck}{3r_0^2\Lambda\epsilon}\left(1+\frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+2\mu}\right)u_{0\xi\xi\xi}.$$

Приравнивая правую часть уравнения (16) к левой части уравнения (19), предварительно умноженной на величину $-\tilde{\lambda}/k_0(\tilde{\lambda}+2\mu)$, и вводя обозначение $u_{0\xi}=s$, получаем следующее нелинейное эволюционное уравнение для волны продольной деформации (s):

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(s_\chi+b_1ss_\xi+b_2s_{\xi\xi\xi}+b_3s_{\xi\xi})=-b_4s_{\eta\eta}, \tag{20}$$

где

$$b_1=\frac{3(\tilde{\lambda}+2\mu)+f-\tilde{\lambda}\lfloor\tilde{\lambda}k_0^2f+\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+2\mu)-(\tilde{\lambda}+\nu_1k_0+2k_0\nu_2)(\tilde{\lambda}-2\mu)\rfloor}{k_0\epsilon(\tilde{\lambda}+2\mu)(\tilde{\lambda}^2+8\tilde{\lambda}\mu+8\mu^2)},$$

$$b_2=\frac{\tilde{\lambda}^2h^2\mu(3\tilde{\lambda}+2\mu)}{3\epsilon\Lambda^2k_0^2(\tilde{\lambda}+2\mu)^2(\tilde{\lambda}^2+8\tilde{\lambda}\mu+8\mu^2)},\quad b_3=\frac{4b_0c\mu(3\tilde{\lambda}^2+6\tilde{\lambda}\mu+4\mu^2)}{3r_0^2\Lambda\epsilon(\tilde{\lambda}+2\mu)(\tilde{\lambda}^2+8\tilde{\lambda}\mu+8\mu^2)},$$

$$b_4=\frac{4\mu(\tilde{\lambda}+\mu)}{\tilde{\lambda}^2+8\tilde{\lambda}\mu+8\mu^2}$$

($f = \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3$). Как видно из выражений для коэффициентов уравнения (20), b_1 обусловлен геометрической и физической нелинейностью упругой среды, b_2 и b_3 характеризуют дисперсию и диссипацию, связанную, соответственно, толщиной пластины и взаимодействием поля деформации с подсистемой неравновесных дефектов.

Уравнение (20) носит название уравнения КПБ и отличается от аналогичного уравнения, полученного в [5], как выражением для коэффициентов, так и по форме (наличием слагаемого $b_2 s_{\xi\xi}$). Последнее оказывает существенное влияние на поведение продольной волны деформации.

Решение эволюционного уравнения и его анализ. Уравнение (20) допускает решение в виде локализованных 2М волновых структур. Следуя [20], представим точное решение этого уравнения в виде

$$s = s_0 F^{-1} + s_1, \tag{21}$$

где s_0, s_1, F – неизвестные функции независимых переменных.

Подстановка выражения (21) в уравнение КПБ дает:

$$s = \frac{12 b_2}{b_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln F) + \frac{12}{5} \frac{b_3}{b_1} \frac{\partial}{\partial x}(\ln F) + s_1, \tag{22}$$

где функция s_1 удовлетворяет уравнению (20) и связана с F следующим образом:

$$s_1 = -4 b_1 b_2 \frac{F_{xxx}}{F_x} + 3 b_1 b_2 \frac{F_{xx}^2}{F_x^2} - 3 b_1 b_3 \frac{F_{xx}}{F_x} + \frac{b_1 b_3^2}{25 b_2} - b_1 \frac{F_x}{F_x} - b_1 b_4 \frac{F_y^2}{F_x^2}. \tag{23}$$

Подставляя $F = 1 + \exp(k_1\xi + k_2\eta - \omega\chi)$ в (21), приходим к точному решению уравнения КПБ:

$$s = -\frac{12 b_2}{b_1} k_1^2 \Psi^2(\xi,\eta,\chi) + \frac{6 b_3}{5 b_1} k_1 \Psi(\xi,\eta,\chi) + \frac{12 b_2}{b_1} k_1^2 + \frac{6 b_3}{5 b_1} k_1, \tag{24}$$

$$\Psi(\xi,\eta,\chi) = \mathrm{th}\left(\frac{k_1\xi + k_2\eta - \omega\chi}{2}\right) \equiv \mathrm{th}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

где ω и k_1 определяются соотношениями $\omega = 6b_3^3/125 b_2^2 \pm 5 b_2 k_2^2/b_3$, $k_1 = \pm b_3/5b_2$, а k_2 – произвольный параметр.

Представим (24) в виде:

$$s = d_1 \Psi^2(\xi,\eta,\chi) + d_2 \Psi(\xi,\eta,\chi) + d_3,$$

где $d_1 = -12 b_2 k_1^2/b_1,\ d_2 = 6 b_3 k_1/5 b_1,\ d_3 = 12 b_2 k_1^2/b_1 + 6 b_3 k_1/5 b_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда $b_0/r_0 < 1$. Запишем неравенства: $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 < 0\,(b_0 < 0)$, $\omega < 0$ и представим коэффициенты d_1, d_2, d_3 в виде:

$$d_1 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2},\ d_2 = \pm\frac{6b_3^2}{25b_1b_2},\ d_3 = \frac{18b_3^2}{25b_1b_2}.$$

Очевидно, что $d_1 < 0$, $d_3 > 0$, а d_2 имеет знак k_1. Если выбрать знак "+", то с учетом $b_3 < 0\,(b_0 < 0)$ и $k_1 < 0$, решение (24) можно представить в виде:

$$s = d_1 \mathrm{th}^2\left(\frac{|k_1|\xi + |k_2|\eta - |\omega|\tau}{2}\right) - d_2 \mathrm{th}\left(\frac{|k_1|\xi + |k_2|\eta - |\omega|\tau}{2}\right) + d_3,$$

где $d_3 = 18b_3^3/25b_1b_2$. Отсюда получаем: $s(-\infty) = 12b_3^2/25b_1b_2^2$, $s(\infty) = 0$.

Решение $s(\Theta)$ имеет максимум в точке $\Theta = \Theta_{cr}$, и этот максимум равен: $s_{max} = 3b_3^2/4b_1b_2^2$. Величина Θ_{cr} находится из условия $s'_\Theta = 0$, или th $[(|k_1|\xi + |k_2|\eta - |\omega\tau|)/2] = -1/4$.

Из проведенного анализа следует, что при определенных условиях решение уравнения (20) будет иметь вид ударной волны с монотонным профилем. Очевидно, что возбуждаемая ударная волна будет волной растяжения ($s > 0$).

Исследован процесс распространения волн деформаций в физически и геометрически нелинейной упругой пластине, находящейся под воздействием внешних потоков энергий, генерирующих ТД кристаллической структуры. Взаимодействие поля деформации в упругой волне с подсистемой неравновесных дефектов происходит по прямому механизму – посредством уменьшения энергий активации образования (или рекомбинации) дефектов за счет деформационного потенциала. Получена система нелинейных уравнений 2М движения упругой пластины с учетом взаимодействия с неравновесными дефектами. Асимптотическим методом данная система уравнений редуцируется к эволюционному уравнению для продольной компоненты поля деформации. Полученное нелинейное уравнение содержит диссипативное слагаемое с третьей производной от деформации, обусловленное дефектно-деформационным взаимодействием. Оно является 2М обобщением известных уравнений Кортевега де Вриза и Бюргерса. Найденное точное ударно-волновое решение эволюционного уравнения описывает как волны растяжения, так и волны сжатия. Существование и условия возникновения таких нелинейных волн определяется диссипативными процессами, обусловленными генерацией (рекомбинацией) дефектов, дисперсией среды, а также упругими свойствами решетки и подсистемы дефектов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К. Нелинейные волны деформации, М., Наука, 1981.

[2] Ерофеев В. И., Клюева Н. В. Акустич. журн., **48**, N 6, 725 (2002).

[3] Porubov A. V. Amplification of nonlinear strain waves in solids. Word Scientific, Singapore, 2003.

[4] Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. А. Акустич. журн., **46**, N 1, 45 (2000).

[5] Потапов А. И., Солдатов И. Н. Акустич. журн., **30**, N 6, 819 (1984).

[6] Porubov A. V., Maugin G. A., and Mareev V. V. Int. J. Non-linear Mech., **39**, N 8, 1359 (2004).

[7] Дрейден Г. В., Порубов А. В., Самсонов А. М., Семенова И. В. Письма в ЖТФ, **22**, вып. 21, 42 (1996).

[8] Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки. М., Наука, 1972.

[9] Мирзаде Ф. Х., Панченко В. Я., Шелепин Л. А. УФН, **166**, N 1, 3 (1996).

[10] Мирзаде Ф. Х. Поверхность, N 9, 90 (2006); N 8, 48 (2006); N 11, 25 (2006).

[11] Mirzade F. Kh. J. Appl. Phys., **97**, N 8, 084911 (2005).

[12] Mirzade F. Kh. Phys. Stat. Sol., **242** (b), N 15, 3099 (2005).

[13] Mirzade F. Kh. Physica, B **368**, N 4, 231 (2005).

[14] Mirzade F. Kh. Physica, B **371**, N 1, 163 (2006).

[15] Мирзаде Ф. Х. Физ. техн. полупров., **40**, N 3, 262 (2006).

[16] Mirzade F. Kh. Phys. Stat. Sol., **243**(b), N 14, 4056 (2006).

[17] Потапов А. И. Нелинейные волны деформации в пластинах и стержнях, Горький, ГГУ, 1985.

[18] Ostrovsky L. A. and Potapov A. I. Modulated Waves. Theory and Applications. The John Hopkins Univ. Press, Baltimore–London, 1999.

[19] Григолюк Э. И., Селезов И. Т. В кн.: Итоги науки и техники. Сер.: Механика твердых тел, **5**, М., ВИНИТИ, 1973.

[20] Кудряшов Н. А. Прикладная математика и механика, **52**, вып. 3, 465 (1988).

Поступила в редакцию 20 октября 2006 г.