УДК 504.35

О СРЕДНЕМ ПОЛЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ АТМОСФЕРЫ НАД НЕРОВНОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б. В. Дементьев, С. А. Решетняк

В рамках полуэмпирической теории турбулентности найдено среднее поле скорости движения воздуха над неровной, но в среднем плоской земной поверхностью. Полученная скорость движения обращается в нуль на поверхности Земли, принимает постоянное значение вне пограничного слоя и может быть использована в анализе процесса распространения примесей, загрязняющих атмосферу Земли.

Наличие различного рода источников, загрязняющих атмосферу Земли вредными примесями, существенным образом влияет на экологическую обстановку в регионе их расположения [1 – 3], а также и в планетарном масштабе [4, 5]. Распространение примеси над земной поверхностью главным образом определяется заданием среднего поля скоростей движения атмосферы, в котором и происходит ее распространение. Выполненные ранее расчеты [6, 7] распределения примеси в атмосфере были привязаны к плоской земной поверхности. В данной работе мы касаемся вопроса влияния рельефа поверхности на процесс распространения примеси. Хорошо известно [1, 2], что движение воздушных масс в атмосфере Земли является турбулентным. Одним из основных признаков турбулентного состояния газа является хаотичный или случайный характер поля скорости его распространения. Это существенным образом влияет на процессы переноса примеси, так как возрастают коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности, зависящие от характерных масштабов турбулентности. В случае плоской земной поверхности эти масштабы в основном определяются размерами неоднородностей температуры, плотности и давления воздуха. При движении атмосферы вблизи неровной земной поверхности ее движение становится турбулентным в еще большей степени. Поэтому цель нашей работы – определить среднюю скорость движения воздуха с учетом неровностей земной поверхности, которую в среднем считаем плоской.

Разделим атмосферу над земной поверхностью, шероховатой с характерным размером по порядку величины d неровностей по вертикали и горизонтали, на две области. Первую (нижнюю) область рассматриваем как некоторый пограничный слой, высота которого h. Вторая область – это атмосфера выше пограничного слоя, где скорость движения атмосферы принимает постоянное значение u_0. Турбулентность в этой области считаем однородной и изотропной, т.е. коэффициенты переноса в уравнениях газодинамики здесь постоянны по величине. Наличие в пограничном слое выступов и впадин может существенным образом повлиять на процесс переноса примеси в атмосфере Земли. В пограничном слое средняя скорость движения атмосферы меняется от нуля вблизи земной поверхности до некоторой постоянной скорости u_0 ветра во второй области.

Рассмотрим движение атмосферы на основе уравнения Навье–Стокса для модели несжимаемой вязкой жидкости [8]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial r_j} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\nu_T \frac{\partial v_i}{\partial r_j}\right), \tag{1}$$

где повтор индексов означает суммирование, v_i – компонента скорости движения воздуха, P – давление, ρ – плотности атмосферного газа, ν_T – коэффициент турбулентной вязкости.

Поскольку движение атмосферы происходит со скоростями, меньшими скорости звука, то модель несжимаемой вязкой жидкости является оправданной, и уравнение неразрывности при постоянной плотности ρ принимает вид

$$\frac{\partial v_j}{\partial r_j} = 0. \tag{2}$$

Как уже отмечалось, в пограничном слое из-за наличия неровностей поверхности с характерным размером d движение воздуха является турбулентным. Причем характерным размером турбулентности как раз является d. В уравнении (1) под v_i следует понимать, вообще говоря, скорость движения газа, которая случайным образом меняется во времени и в пространстве. Так как ниже будем интересоваться средней скоростью движения, то определим ее следующим образом

$$u_i = \langle v_i \rangle = \frac{1}{S}\int_S \int v_i(x+\xi, y+\eta, z) d\xi d\eta, \tag{3}$$

где S – площадь земной поверхности с центром в точке (x, y, z), содержащая большое число неровностей, т.е. выступов и впадин. В силу эргодичности скорость (3) должна также совпадать со средним значением по времени.

Представляя далее скорость движения газа в виде

$$v_i = u_i + \delta v_i, \ \langle \delta v_i \rangle = 0, \tag{4}$$

где δv_i – отклонение от средней скорости, и подставляя (4) в (1), после указанного осреднения приходим к следующему уравнению для средней скорости движения атмосферного газа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\nu_T \frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right) - \langle \delta v_j \frac{\partial}{\partial r_j} \delta v_i \rangle. \tag{5}$$

Заметим, что в уравнении (5) пространственные производные являются крупномасштабными производными, т.е. изменяются на расстояниях, существенно превышающих характерный размер неровности d.

После подстановки (4) в (2) и осреднения имеем

$$\frac{\partial u_j}{\partial r_j} = 0, \ \frac{\partial}{\partial r_j}(\delta v_j) = 0. \tag{6}$$

С учетом (6) последний член в уравнении (5) принимает вид

$$F_i = -\langle \delta v_j \frac{\partial}{\partial r_j} \delta v_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial r_j} \langle \delta v_j \delta v_i \rangle. \tag{7}$$

Его можно рассматривать также как силу трения, обусловленную шероховатостью земной поверхности. Мы не будем останавливаться здесь на вычислении корреляторов компонент отклонения скорости от ее среднего значения, а ниже в расчетах воспользуемся очевидными для них свойствами.

Перейдем теперь к решению уравнения (5). Выберем систему координат так, чтобы ось 0X была направлена вдоль средней скорости u движения атмсоферы. Тогда вектор скорости будет иметь только одну компоненту, т.е. $u = (u, 0, 0)$. Причем эта компонента зависит от высоты z и не зависит от горизонтальных координат x, y. Будем интересоваться стационарным распределением средней скорости движения, опуская в (5) частную производную по времени. Рассмотрим последовательно каждый член уравнения (5) для единственной компоненты u средней скорости. Прежде всего, заметим, что

$$u_j \frac{\partial u}{\partial r_j} = u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

поскольку u зависит только от высоты.

Плотность газа ρ постоянна по величине. Градиент давления вызывает направленное движение газа, но он настолько мал, что мы им пренебрегаем. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0.$$

Поскольку корреляторы $\langle \delta v_i \delta v_j \rangle$ зависят только от высоты, то для силы трения имеем

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial r_j}\langle \delta v_x \delta v_j \rangle = -\frac{\partial}{\partial z}\langle \delta v_x \delta v_z \rangle$$

и в результате уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left(\nu_T \frac{du}{dz}\right) + F_x = 0. \quad (8)$$

Из общих соображений ясно, что корреляторы зависят от средней скорости движения u и характерных размеров неровностей земной поверхности. Кроме того, при равной нулю средней скорости они обращаются в нуль. Мы ограничиваемся рассмотрением первых двух, отличных от нуля, членов разложения коррелятора $\langle \delta v_x \delta v_z \rangle$ в ряд по степеням u:

$$\langle \delta v_x \delta v_z \rangle = au + bu^2 + \ldots .$$

Теперь заметим, что на больших высотах атмосфера является однородной и изотропной. Поэтому рассматриваемые корреляторы должны обращаться в нуль при больших значениях z. Отсюда коэффициенты a и b связаны между собой условием

$$au + bu^2|_{z\to\infty} = au_0 + bu_0^2 = 0, \; a = -bu_0,$$

где u_0 – скорость ветра в верхнем слое атмосферы.

В полуэмпирической теории турбулентности [8] используется следующий коэффициент турбулентной вязкости

$$\nu_T = \nu(1 + R/R_c),$$

где ν – коэффициент кинетической вязкости, $R = ul/\nu$ – число Рейнольдса, u – скорость течения газа, l – характерный размер задачи, совпадающий в данном случае с характерным размером d, R_c – критическое значение числа Рейнольдса, выше которого наступает турбулентное течение газа.

В полуэмпирических теориях турбулентности выбор зависимости числа Рейнольдса от координат и скорости делается с учетом характера рассматриваемого турбулентного течения газа (см., например, [8]). Так при рассмотрении стационарного течения жидкости вдоль плоской неограниченной поверхности характерный масштаб l считается переменным и совпадающим с расстоянием z от поверхности. В результате распределение скорости течения над плоской поверхностью подчиняется закону $\ln\,(1 + z/z_0)$, который часто используется при рассмотрении пограничного слоя небольшой толщины [1]. Однако этот подход неприменим в нашем случае, так как с ростом z скорость течения воздуха над поверхностью Земли должна принимать постоянное значение. Приведем второй пример – турбулентное течение жидкости или газа через трубу радиуса a [8]. При ламинарном течении газа в трубе скорость изменяется по параболическому закону $u \propto (a^2 - r^2)$. Именно эта зависимость скорости u ламинарного течения газа от радиуса трубы используется в определении числа Рейнольдса и коэффициента турбулентной вязкости. При этом, как отмечается в [8], теория хорошо согласуется с экспериментальными данными.

В нашем случае рассматривается течение газа над неровной земной поверхностью с характерным размером неровности d. Естественно считать масштаб l турбулентного течения газа совпадающим с d, а скорость u – со средней скоростью течения газа над поверхностью Земли. При таком задании числа Рейнольдса, как будет показано ниже, распределение скорости подчиняется экспоненциальному закону и в отличие от случая плоской поверхности на больших расстояниях z принимает постоянное значение.

Движение атмосферы практически всегда является турбулентным и, как следствие, $R \gg R_c$, поэтому мы полагаем

$$\nu_T = d \cdot u / R_c.$$

С учетом сказанного выше дифференциальное уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d}{R_c} \cdot \frac{d}{dz}\left(u\frac{du}{dz}\right) = -\frac{a}{u_0}\frac{d}{dz}[u(u - u_0)].$$

Дополняя его граничными условиями

$$u\,\big|_{z=0} = 0, \;\; u\big|_{z\to\infty} = u_0,$$

находим среднюю скорость движения атмосферы в зависимости от высоты:

$$u = u_0[1 - \exp(-z/h)], \tag{9}$$

где $h = d/|b|R_c$ – высота пограничного слоя, в котором скорость меняется от нуля вблизи поверхности Земли до скорости света u_0 в верхнем слое атмосферы. Так как мы не вычисляли корреляторы отклонений компонент скорости от ее среднего значения, то величина h является подгоночным параметром, который выбирается из сопоставления теории с экспериментальными данными. Отметим только, что данный параметр зависит от вязкости газа, плотности атмосферы, характерных размеров неоднородностей земной поверхности и критического значения числа Рейнольдса.

Таким образом, найденное в рамках полуэмпирической теории турбулентности распределение по высоте среднего поля (9) скорости движения воздуха над неровной, но в среднем плоской поверхностью Земли, содержит правильные граничные условия. Средняя скорость движения изменяется от нулевого значения до некоторой постоянной величины в пределах пограничного слоя распространения атмосферы. Мы полагаем, полученная средняя скорость может быть использована в анализе распространения загрязняющих атмосферу примесей над поверхностью Земли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уорк К., Уорнер С. Загрязнение воздуха. Источники и контроль. М., Мир, 1980.

[2] Детри Ж. Атмосфера должна быть чистой. Загрязнения атмосферы и борьба с ними. М., Прогресс, 1979.

[3] Виролайнен Я. А., Дементьев Б. В., Иванов В. В., Поляков В. В. Исследования Земли из космоса, N 6, 39 (2002).

[4] Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., Наука, 1982.

[5] Марчук Г. И., Алоян А. Е. Известия АН. Физика атмосферы и океана, **31**, N 5, 597 (1995).

[6] Иванов В. В., Решетняк С. А., Шелепин Л. А., Щеглов В. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 4, 35 (2002).

[7] Дементьев Б. В., Иванов В. В., Решетняк С. А. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 10, 18 (2003).

[8] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., Наука, 1982.

Поступила в редакцию 20 октября 2006 г.