УДК 519.857

О СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОКОН В ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Д. С. Чернавский, А. П. Никитин, О. Д. Чернавская, Д. С. Щепетов

Проблема возникновения и исчезновения динамических окон в дискретных отображениях важна и интересна как в фундаментальном, так и в прикладном аспектах. В работе проведено аналитическое и компьютерное исследование возникновения динамических окон и их структурной (параметрической) устойчивости. На примере модели кубического отображения показано, что переход в окно и выход из него зависят от характера изменения управляющего параметра, от начальных условий и от деталей расчетной схемы. В реальных задачах точность исходной информации всегда ограничена, поэтому и точность расчета должна быть адекватна целям задачи. Показано, что обработка данных в рамках модели с большей точностью не только нецелесообразна, но может привести к артефактам.

Явление динамического хаоса в одномерных дискретных отображениях $x_{i+1} = F(x_i)$ активно исследовалось как аналитически, так и в ходе компьютерных вычислительных экспериментов (см. обзор в [6]).

Кубическое отображение $x_{i+1} = \nu(x_i - x_i^3)$ [4, 8] представляет особый интерес, так как может служить простой моделью такого понятия теории динамических систем как "перемешивающий слой" [2, 3, 5]. При $0 \leq \nu \leq 1$ имеется единственное устойчивое стационарное состояние $x = 0$. При $1 < \nu \leq 2$ существуют два устойчивых состояния (положительное и отрицательное), а конечный результат определяется начальными условиями. При $2 < \nu < \nu_{cr} = 3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$ может иметь место хаотический режим, но смены знака x_i не происходит. При $\nu > \nu_{cr}$ имеют место как хаотические, так и динамические режимы. При этом происходят перескоки от положительных к отрицательным значениям x_i при любых начальных условиях, таких, что $|x_1| < \sqrt{(\nu+1)/\nu}$ и $|x_1| \neq 0; 1$. При $\nu > 3$ величина $|x_i|$ неограниченно возрастает.

В [2] принималось, что управляющий параметр ν медленно и монотонно уменьшается с возрастанием номера итерации, например, по экспоненциальному закону $\nu = \nu_0 \exp(-\gamma t)$, где $\gamma << 1$, $\nu_{cr} < \nu_0 \leq 3$. В настоящей статье мы акцентируем внимание на другом аспекте кубического отображения: при изменении управляющего параметра ν в области $\nu > \nu_{cr}$ хаотическое поведение системы перемежается сравнительно узкими областями $\Delta\nu$ (так называемыми "окнами"), в рамках которых возникают устойчивые циклы и поведение системы жестко детерминировано.

Проблема возникновения и исчезновения динамических окон важна как в фундаментальном, так и в прикладном аспектах. Дискретные модели часто используются в естественных и технических науках, в экономике и социологии. В хаотическом режиме горизонт прогнозирования поведения системы ограничен, а в случае образования "окна" – бесконечен. Переход в окно и выход из него зависит от изменения управляющего параметра, от начальных условий и, что важно, от деталей расчетной схемы (точности и характера округления).

Аналитическое исследование возникновения и устойчивости окон. Динамическим окном будем называть интервал $\Delta\nu$, внутри которого имеется притягивающий цикл, содержащий k итераций. Уместно сделать несколько замечаний.

I) Предполагается, что длина периода конечна и не велика. Дело в том, что в реальных задачах длина L наблюдаемой последовательности $\{x_i\}$ всегда ограничена. Если $k > L$, то такая последовательность неотличима от хаотической.

II) Слова "притягивающий цикл" означают, что существует конечный интервал начальных условий Δx, таких, что все траектории, выходящие из этого интервала, с течением времени выходят на один и тот же цикл длины k. Это означает, что окно динамически устойчиво (не исчезает при малых вариациях начальных условий).

III) Интервал управляющего параметра $\Delta\nu$ конечен и достаточно велик. Это означает, что этот интервал должен быть больше допустимой в данной задаче погрешности измерений параметра (или компьютерного счета): $\Delta\nu > \delta\nu$. В этом случае динамическое окно можно считать параметрически (или структурно) устойчивым.

IV) Понятие "цикл длины k" должно быть уточнено. В действительности, в окне имеет место квазипериодический режим. Он содержит два (или более) перемежающихся цикла одинаковой длины k с близкими промежуточными значениями x_i.

Известно [5], что динамическая устойчивость периодических решений зависит от величины

$$\lambda = \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(x_i) \right| - 1, \tag{1}$$

где $F'(x_i)$ – первая производная функции $F(x_i)$ в точке x_i. При $\lambda < 0$ цикл устойчив. Величина λ играет ту же роль, что и число Ляпунова в континуальных динамических системах. Из (1) вытекает ряд следствий.

1) Если цикл содержит точку x_0, соответствующую вершине x_v функции $F(x)$, то $F'(x_v) = 0$ и $\lambda = -1$, т.е. цикл устойчив. Если точка x_0 близка к вершине, так что $|F'(x_0)| = \varepsilon < 1$, то знак λ зависит от величины $\prod_{i=1}^{k-1} F'(x_i)$. Производные $F'(x_i)$ в остальных точках x_i не равны нулю и могут быть достаточно велики. Если цикл не содержит точек внутри интервала $x_v \pm \Delta x_0$ ($|F'(x_v \pm \Delta x_0)| \geq 1$), то цикл наверняка неустойчив.

2) Длина устойчивого цикла k должна быть достаточно мала. Из (1) следует, что в таком цикле $\sum_{i=0}^{k-1} \ln|F'(x_i)| \leq k \ln(|F'(x_v \pm \Delta x_0)|)$. Обозначив $\sum_{i=0}^{k-1} \ln|F'(x_i)| = k\langle \ln|F'(x_i)|\rangle$, получим оценку для длины устойчивого цикла $k \leq \dfrac{\ln(|F'(x_v \pm \Delta x_0)|)}{\langle \ln|F'(x_i)|\rangle}$. Величина $\ln(|F'(x_v \pm \Delta x_0)|)$ зависит от точности определения величины x_0 и/или точности счета. Величина $\langle \ln|F'(x_i)|\rangle$ в силу усреднения является грубой (в смысле Андронова), т.е. слабо зависит от малых девиаций начальных условий.

Структурная устойчивость динамических окон. Обсудим вопрос, при каких значениях параметра ν могут возникать динамические окна и какова их структурная (параметрическая) устойчивость. Пусть имеется отображение:

$$x_{i+1} = F(\nu, x_i). \tag{2}$$

Цикл длины k при данном ν существует, если:

$$x_0 - x_k = 0. \tag{3}$$

Согласно (2), $x_k = F(\nu, x_{k-1}) = F(\nu, F(\nu, x_{k-2})) = F(\nu, F(\nu, F(\nu, x_{k-3}))) = ... = F(\nu, F(\nu, ...F(\nu, F(\nu, x_0)...)$. Тогда условие (3) приобретает вид

$$F(\nu, k) = F(\nu, F(\nu, ...F(\nu, F(\nu, x_0)...) - x_0 = 0, \tag{4}$$

где $F(\nu, k) = F(\nu, x_{k-1})$.

Выражение (4) является алгебраическим уравнением, определяющим значения параметра. Цикл длины k существует при тех значениях ν, которые являются вещественными и положительными корнями уравнения (4). Обозначим такие корни $\nu_j(k)$, где j– номер корня.

Цикл, соответствующий корню $\nu_j(k)$, структурно устойчив при следующих условиях.

1) При малых изменениях ν величина $F(\nu, k)$ в области $\nu \cong \nu_j(k)$ меняется мало. Отсюда следует условие $\left.\dfrac{\partial F(\nu, k)}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_j(k)} = 0$. Оно означает, что в точке $\nu_j(k)$ совпадают два (или более) корня функции $F(\nu, k)$. Далее такие точки будем обозначать как $\nu_j^{(t)}(k)$. Дополнительную информацию дает вторая производная $\sigma = \left.\dfrac{\partial^2 F(\nu, k)}{\partial \nu^2}\right|_{\nu_j(k)=\nu_j^{(t)}(k)}$. Ширина окна $\Delta\nu$ обратно пропорциональна корню из этой величины.

2) Точки существования и устойчивости других циклов $\nu_j^{(t)}(l)$ (длины $l \neq k$) не должны совпадать с точками $\nu_j^{(t)}(k)$ (или располагаться вблизи них). Иначе может возникнуть перемежаемость, т.е. непредсказуемые перескоки с цикла длины k на циклы длины l и обратно. Если l кратно k, совпадение корней неизбежно, но оно не приводит к перемежаемости.

Обсудим случай, когда корни уравнения (4) сближаются, так что между ними остается интервал $\Delta\nu \cong \varepsilon << 1$. Внутри $\Delta\nu$ функция $F(x)$ не равна нулю, но мала в меру $F(x) \cong 2\sigma\varepsilon^2$. Это означает, что конечная точка цикла не совпадает с x_0: $x_k = x_0 + \delta x$ (где $\delta x \cong 2\sigma\varepsilon^2$). Девиацию δx можно компенсировать изменением x_0 так, чтобы $F(\nu_a, x_0 + \delta x_0) = 0$, где ν_a– любое значение внутри $\Delta\nu$, а величина δx_0 того же порядка, что и δx. При этом должно соблюдаться условие динамической устойчивости цикла, т.е. $F'(x_0 + \delta x_0) << 1$. Последнее накладывает ограничение на величину δx_0 и, следовательно, на ширину окна $\Delta\nu$.

На рис. 1 показан вид кривой $F(\nu < \nu_{cr}, k = 8)$ для кубического отображения. Видно, например, что окно в окрестности $\nu \approx 2.7$ возникло в результате сближения двух корней, а окно при $\nu \approx 2.84$ – в результате скопления многих корней.

На рис. 2 показана экспериментальная зависимость $\lambda^*(\nu) = \left\langle \dfrac{1}{L_f - L_s} \times \sum_{i=L_s+1}^{L_f} \ln|F'(\nu, x_i)| \right\rangle$, где усреднение выполнено по набору из $M = 1000$ последовательностей $\{x_i\}$ с генерируемыми случайным образом начальными значениями, а L_s и L_f – достаточно велики.

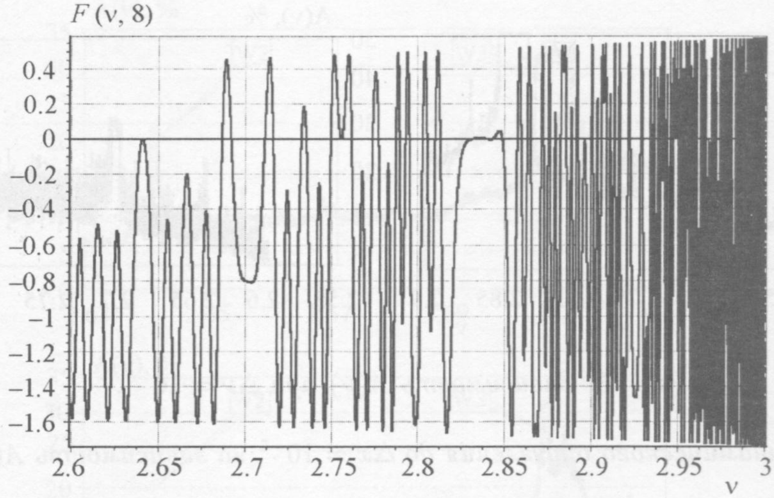

Рис. 1. *Вид функции* $F(\nu, k)$ *при* $k = 8$.

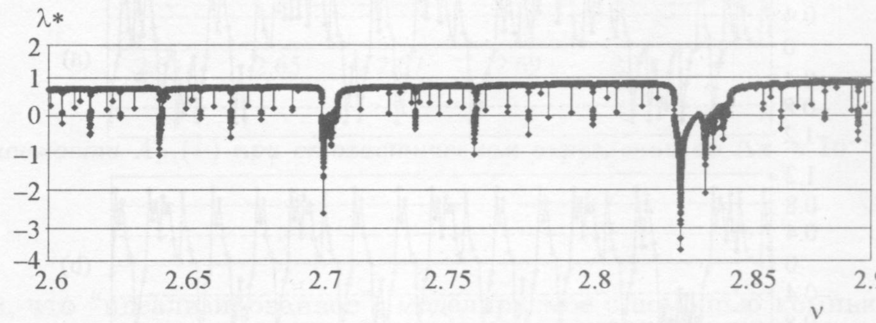

Рис. 2. *Усредненная характеристика устойчивости траекторий* $\lambda^*(\nu)$.

Для визуальной оценки поведения системы может быть использована развертка ряда $\{x_i\}$. На рис. 5а показан фрагмент модельной последовательности для кубического отображения при значении параметра ν, соответствующем хаотическому режиму. Для сравнения на рис. 7а показан вид последовательности при попадании в динамическое окно.

При $\nu > \nu_{cr}$ информативны события смены знака в парах $\{x_{i-1}; x_i\}$ (перескоки между квадрантами диаграммы Ламерея [5]). Поэтому дополнительно к периоду цикла k можно ввести понятие "периодичность" P, под которой ниже понимается характерное количество элементов последовательности, через которое происходит изменение знака x_i. Так, на рис. 7а период $k = 6$ сочетается с периодичностью $P = 3$ элемента.

Численный эксперимент проводился путем сканирования по диапазону параметра $\nu \in [2.59...3.00)$ с различными шагами $\Delta\nu$. Для каждого ν_j в качестве базовой ста-

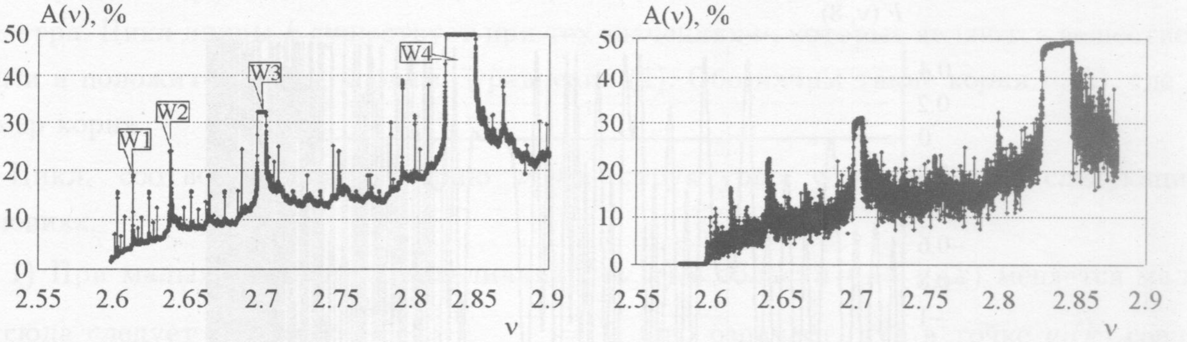

Рис. 3. *Зависимость $A(\nu)$ при $\Delta\nu = 10^{-5}$.*

Рис. 4. *Влияние динамического округления до $\Delta x = 10^{-5}$ на зависимость $A(\nu)$ (ср. с рис. 3).*

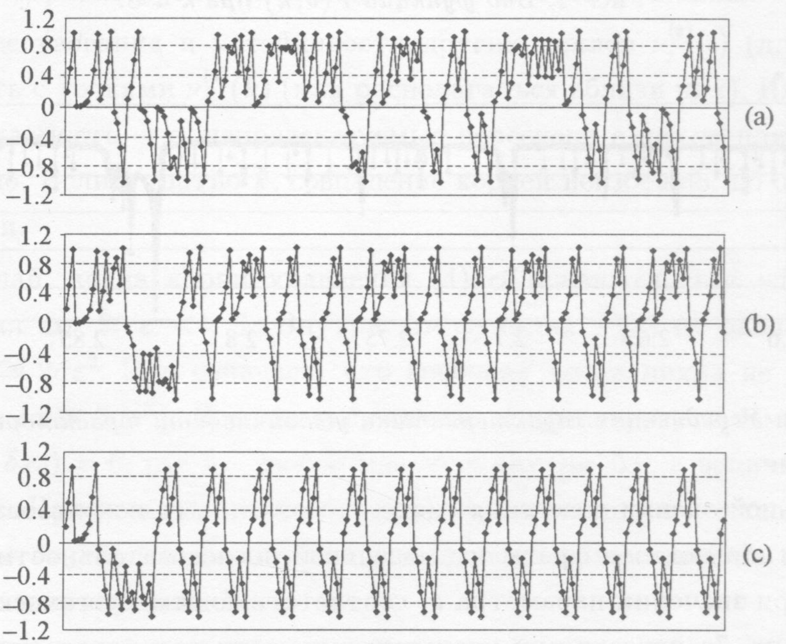

Рис. 5. *Реализация последовательности при $\nu = 2.65$, $x_1 = 0.2$ без округления (вверху, a), с динамическим округлением до $\Delta x = 10^{-4}$ (в середине, b), $\Delta x = 10^{-3}$ (внизу, c).*

тистики оценивалась величина $A(\nu)$, равная отношению числа перескоков к длине L анализируемой последовательности. Максимальное значение $A(\nu)$ составляет 50%, т.е. соответствует ситуации, когда смена знака x происходит через каждые два элемента. Дополнительно проводилось усреднение $A(\nu)$ по набору из Z последовательностей (см. рис. 3).

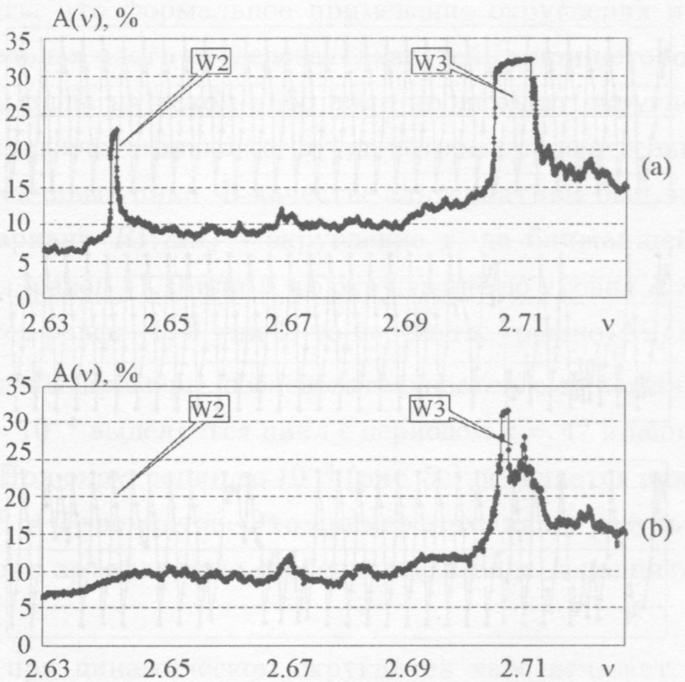

Рис. 6. *Зависимости* $A_{R1}(\nu)$ *при стохастическом округлении до* $\Delta x = 10^{-4}$ *(a) и до* $\Delta x = 10^{-3}$ *(b).*

Отметим, что "идеализированное", моделируемое с помощью компьютерного представления вещественных чисел (например, 80-битный тип *extended* обеспечивает до 20 значащих цифр) кубическое отображение в закритической области $\nu > \nu_{cr}$ проявляет целый набор особенностей: чередование периодичностей и т.п. На самом деле, в практических измерениях такая точность не реализуется. Под "измерениями" здесь могут пониматься результаты любых наблюдений, опытов, анализов, получаемых в технических, естественно-научных, социально-экономических, медицинских и иных исследованиях.

Проблема точности измерений. Динамическое округление. Для описания любых реальных результатов достаточно конечного количества значений. Например, если принять предельную точность в 6 значащих цифр, то любые значения можно представить в виде $(a, bcdef)10^g$. В этой записи a может варьироваться от 1 до 9, стоящие после запятой b, c, d, e, f – от 0 до 9, а показатель степени g для любых мыслимых измерений не выходит за пределы интервала (–100, +100). Тогда общее количество возможных значений не превысит $9 \cdot 10^5 \cdot 201$, т.е. составит менее 200 миллионов.

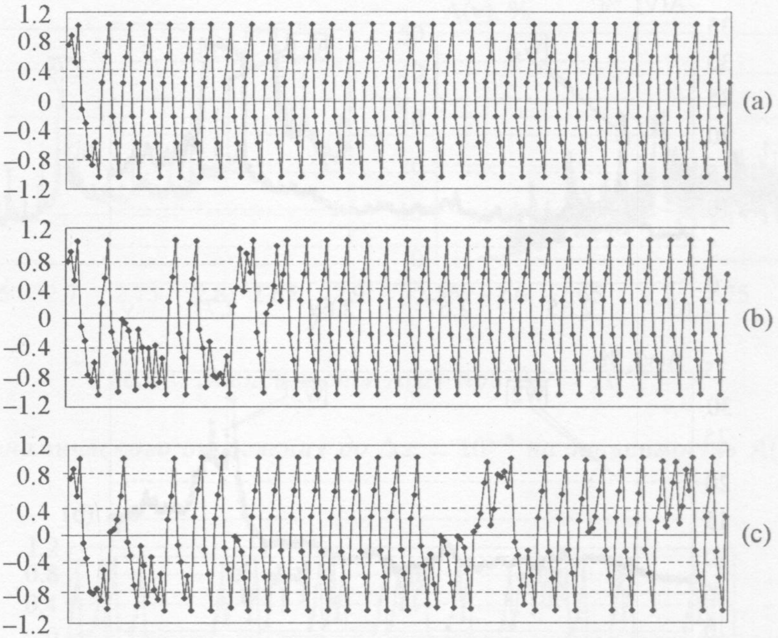

Рис. 7. *Реализации при $\nu = 2.7025$, $x_1 = 0.75$ в пределах окна W3 без округления (a) и со стохастическим округлением до $\Delta x = 10^{-4}$ (b), $\Delta x = 10^{-3}$ (c).*

Изучение ошибок округления, влияющих на пространственную дискретность динамических систем с дискретным временем (отображений), является объектом значительного интереса за последние два десятилетия. Отметим, в частности, работы М.Л. Бланка из ИППИ РАН [1]. Был развит математический аппарат для теоретического исследования асимптотических свойств подобных систем. Показано, что влияние даже достаточно малых ошибок округления может кардинально изменить поведение сложной хаотической системы в рамках рассматриваемой модели. Результирующее поведение очень чувствительно к тонкой структуре фазового пространства дискретизации, соответствующей этим ошибкам [7, 9].

Нами были исследованы свойства окон в кубическом отображении при округлении до ближайшей значащей цифры при различных дискретностях Δx: $10^{-8}...10^{-3}$ (так называемое “динамическое округление”). Из рис. 4 видно, что особенностью такого округления являются “размывание” тренда $A(\nu)$ и появление многочисленных “выбросов”. При грубом округлении фактически весь интервал ν состоит из динамических процессов и хаос практически отсутствует.

Следует отметить, что формальное применение округления имеет существенный недостаток: значительная часть последовательностей (а при некоторых ν – все) фактически вырождается, когда на каком-либо шаге происходит округление x_i до 0, –1 или +1. Исключение составляют только те $\{x_i\}$, в которых сравнительно быстро формируется какой-либо устойчивый цикл. В качестве альтернативы был, например, опробован алгоритмический вариант $R1(\Delta x)$ – округление x_i до ближайшей дискретности Δx, если окажется, что x_i равен –1, 0 или 1, то округление до уровня $\Delta x/10$. Если и на этом уровне x_i оказывается равен –1, 0 или 1, то переход к уровню $\Delta x/100$ и т.д.

На рис. 5 приведены примеры последовательностей с динамическим округлением. На рис. 5b при $\Delta x = 10^{-4}$ выделяется цикл с периодом $k = 42$ и периодичностями $P =4$, 6, 7 и 15 элементов. При округлении до 10^{-3} (рис. 5c) появляется цикл с периодом $k = 14$ и периодичностью $P = 7$ элементов. Это пример того, как в результате динамического округления возникают артефактные особенности в виде дополнительных устойчивых циклов.

Таким образом, при динамическом округлении хаос исчезает. Физический смысл этого явления прост. Если малая девиация в неустойчивом цикле при возвращении в исходную точку возрастает, но оказывается меньше Δx, то после округления полученное значение x_i точно совпадает с исходным x_i. Это означает, что эффект неустойчивости исчезает.

Еще раз подчеркнем, что при постоянном ν и при любом динамическом округлении хаос, говоря математически строго, отсутствует. Например, при округлении до $\Delta x = 10^{-4}$ число возможных значений составляет порядка $N \sim 2\cdot10^4$. Так как x_i детерминированно определяет x_{i+1}, то максимальный период цикла составляет N элементов. Поэтому наличие "хаоса" можно постулировать только таким образом, что периодические циклы не обнаруживаются при наблюдении некоторого априорного заданного числа L элементов последовательности $\{x_i\}$.

Стохастическое округление. Под "стохастическим округлением" понимается вариант, при котором округление до кратности Δx вверх или вниз производится случайно и равновероятно. На рис. 6 показаны зависимости $A_{R1}(\nu, \Delta x)$ с различной дискретностью Δx на интервале $\nu \in (2.63; 2.72)$, позволяющем отразить мелкомасштабные особенности поведения кривых.

Уже при округлении до $\Delta x = 10^{-4}$ зависимость $A_{R1}(\nu)$ становится гладкой и исчезают все артефакты (см. рис. 4), а также исходные особенности в виде "особых точек" (ср. рис. 3). При этом еще сохраняется устойчивый цикл W2 в области $\nu \approx 2.641$ и гиперустойчивый цикл W3 в окрестностях $\nu \approx 2.70$. При $\Delta x = 10^{-3}$ окно W2 полностью исчезает, а W3 сохраняется, хотя и несколько суженное. В качестве иллюстрации на рис. 7 приведены развертки для гиперустойчивого окна W3. Видно, что при $\Delta x = 10^{-4}$ цикл сохраняется, а при $\Delta x = 10^{-3}$ начинает "разрушаться" – при этом фрагменты из нескольких периодов цикла чередуются с интервалами "хаотического" поведения системы.

Итак, при грубом стохастическом округлении исчезают, во-первых, циклы-артефакты, проявившиеся при динамическом округлении, и, во-вторых, даже некоторые гиперустойчивые циклы. Физический смысл этого также прост. Если в гиперустойчивом цикле мы возвращаемся практически точно в исходное положение, то при стохастическом округлении мы приходим в соседнее положение, соответствующее кратности Δx. Причем это положение случайно в силу случайности направления округления. Таким образом, стохастическое округление по сути аналогично случайным внешним воздействиям на систему ("шумовому полю").

В работе показано, что рассматриваемое простое кубическое отображение демонстрирует целый ряд интересных эффектов, в частности, динамические окна в области хаотического поведения системы. Важно подчеркнуть, что характерные свойства этих окон существенно зависят от способа округления измерений.

В современной науке все большую роль при исследовании свойств динамических моделей играет компьютерный эксперимент. Он призван дополнить (или заменить) традиционный аналитический метод. Однако эти подходы иногда вступают в противоречие, чему посвящена обильная литература. Причина разногласия в том, что при компьютерных расчетах используется дискретное представление вещественных чисел и точность его всегда ограничена. При аналитических исследованиях фактически предполагается, что исходные данные (начальные условия и параметры) заданы с бесконечной точностью.

Если процесс, описываемый моделью, динамически и структурно устойчив, то оба подхода приводят к одинаковым результатам. Если же процесс неустойчив, то возникают противоречия, поскольку малые различия начальных условий и/или параметров нарастают со временем, приводя к большим расхождениям. В этом случае возникает вопрос: какой из подходов адекватен целям задачи. Дело в том, что в любой конкретной задаче параметры и начальные условия задаются с определенной конечной точностью. Последняя определяется целью постановки задачи и возможностями измерения физических величин. Превышение точности не целесообразно, это утверждение очевидно и не ново. Менее очевидное утверждение: превышение точности может привести к артефактам, т.е. предсказанию эффектов, которые отсутствуют при менее и более точных расчетах.

Отметим, что проблема точности расчетов вставала в физике и ранее, еще до эры компьютеров, при описании неустойчивых процессов. Были введены понятия "гугол" (число 10^{100}) и "обратный гугол" (число порядка 10^{-100}). Показано [5], что все известные физические величины в нашей Вселенной не выходят за эти рамки. Характерная точность современных компьютерных вычислений существенно ниже (порядка 10^{-20}). В большинстве реальных задач целесообразная точность еще ниже (порядка 5-7 десятичных знаков).

Появление артефактов зависит также и от характера округления. Подчеркнем, что это замечание носит не математический, а скорее физический (или методологический) характер. В реальных задачах мы всегда имеем дело с округленными величинами. Любая реальная система погружена в шумовое поле, влияние которого и определяет достоверность последней значащей цифры. Поэтому значимы только те утверждения, которые сохраняют силу в шумовом поле, характерном для данной задачи. В частности, при округлении до $\Delta x = 10^{-3}$ утверждения об устойчивых циклах, порог устойчивости которых меньше Δx, к реальным задачам уже не относятся.

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант РГНФ N 04-03-00069а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бланк М. Л. Успехи математических наук, **44**(6), 3 (1989).

[2] Колупаев А. Г., Чернавский Д. С. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1-2, 12 (1997).

[3] Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Чернавский Д. С. Препринт ИПМ N (ИПМ, Москва, 2005).

[4] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. Наука, М., 1990.

[5] Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации). Изд. второе. Эдиториал УРСС, М., 2004.

[6] Чернавский Д. С., Никитин А. П., Чернавская О. Д. и др. Препринт ФИАН N 11 (ФИАН, Москва, 2006).

[7] Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Phys. Rev. A **38**, 3688 (1988).

[8] R o g e r s T., W h i t l e y D. C. Math. Model. **4**, 9 (1983).
[9] V i v a l d i F. Experimental Mathematics **3**(4), 303 (1994).

Поступила в редакцию 28 ноября 2006 г.