

УДК 953.951

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭФФЕКТИВНОСТИ ТОРМОЗНОЙ ГЕНЕРАЦИИ И ПОЛЯРИЗАЦИИ ГАРМОНИК ПОЛЯ НАКАЧКИ В ПЛАЗМЕ, ПОЛУЧЕННОЙ ПУТЕМ ФОТОИОНИЗАЦИИ ГАЗА ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ВОЗБУЖДЕННОМ СОСТОЯНИИ

К. Ю. Вагин

Найдены нелинейные аналитические зависимости эффективности тормозной генерации и степени круговой поляризации девятой и одиннадцатой гармоник от напряженности и степени круговой поляризации мощного поля накачки в плазме, полученной путем фотоионизации газа возбужденных водородоподобных атомов этим полем. На примере гармоник с номерами с третьей по одиннадцатую рассмотрены общие закономерности нелинейных пороговых явлений: бифуркации полной круговой поляризации гармоник и реализации максимума эффективности генерации гармоник полем накачки с поляризацией, отличной от линейной. Приведены условия наиболее эффективной генерации гармоник с заданными поляризационными свойствами.

Генерация гармоник излучения поля накачки в плазме изучается в течение многих лет [1]. Особый интерес к плазме, которая образуется при ионизации предварительно возбужденных атомов, возник в связи с тем, что, согласно работе [2], в такой плазме интенсивность генерируемой третьей гармоники значительно превышает соответствующую интенсивность в плазме, образующейся при ионизации невозбужденных атомов. Теория эффективности тормозной генерации гармоник эллиптически поляризованного поля накачки в плазме, образующейся при ионизации газа водородоподобных атомов,

электроны которых находятся в основном состоянии, рассматривалась для третьей гармоники в [3], а в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом n для гармоник с третьей по седьмую – в [4]. При этом была использована модель, отвечающая режиму ионизации Бете (см., например, [3, 4]) быстрого включения мощного поля накачки. Поляризационные свойства этих же гармоник теоретически рассматривались в работах [5, 6]. Для рассмотренных низких гармоник поля накачки в [3–6] обнаружен целый ряд интересных свойств эффективности генерации и поляризации излучаемых полей, обусловленных существенно нелинейной зависимостью этих величин от амплитуды напряженности эллиптически поляризованного поля накачки $\mathbf{E} = E\{\epsilon_x \cos(\omega t - kz), \epsilon_y \sin(\omega t - kz), 0\}$ и степени его круговой поляризации $A = -2\epsilon_x \epsilon_y$. Здесь ϵ_x и ϵ_y – компоненты единичного вектора поляризации, ω – частота, а k – волновое число поля накачки, связанные дисперсионным соотношением для поперечных электромагнитных волн в плазме.

В [3–6] изложен общий подход и схема вывода выражений для компонент вектора напряженности \mathbf{E}_{2N+1} поперечного поля нечетной гармоники с частотой $(2N + 1)\omega$, генерируемой в плазме полем накачки в дипольном приближении благодаря механизму тормозного излучения в предположении малости эффективных частот столкновений электронов по сравнению с частотой накачки. При этом в режиме ионизации Бете распределение электронов по скоростям сохраняет память о состоянии электронов в атоме до ионизации (см. [3–6]). Приведем здесь лишь окончательные выражения, необходимые нам при дальнейшем обсуждении. Эффективность генерации $(2N + 1)$ -й гармоники, определяемая как отношение усредненных по времени квадратов напряженностей электрических полей гармоники и накачки в геометрии плоских волн, имеет вид

$$\eta_{2N+1}(x, A) = \left(\frac{4e^4 Z n_e \Lambda}{m_e^2 (V_z/n)^3 \omega} \right)^2 \cdot \Psi_{2N+1}(x, A), \quad (1)$$

где $x = neE/(m_e \omega V_z)$ – безразмерная напряженность поля накачки, e , m_e и n_e – заряд, масса и плотность числа электронов, Z – эффективный заряд ионов, V_z – кулоновская единица скорости [3], Λ – кулоновский логарифм. В свою очередь функция

$$\begin{aligned} \Psi_{2N+1}(x, A) = & \left(\frac{2N+1}{N(N+1)} \right)^2 \frac{1}{2x^6 \rho^6} \left\{ (1+\rho^2) \left[D\alpha_{2N+1}^{(+)} \left(\frac{\sqrt{2}b}{x}, \rho \right) \right] + \right. \\ & \left. + (1-\rho^2) \left[D\alpha_{2N+1}^{(-)} \left(\frac{\sqrt{2}b}{x}, \rho \right) \right] \right\} \Big|_{b=1} \end{aligned} \quad (2)$$

определяет относительную эффективность генерации соответствующей гармоники. Степень круговой поляризации $(2N + 1)$ -й гармоники дается выражением

$$A_{2N+1}(x, A) = -2A \frac{[D\alpha_{2N+1}^{(+)}(\frac{\sqrt{2b}}{x}, \rho)] \cdot [D\alpha_{2N+1}^{(-)}(\frac{\sqrt{2b}}{x}, \rho)]}{(1 + \rho^2) [D\alpha_{2N+1}^{(+)}(\frac{\sqrt{2b}}{x}, \rho)] + (1 - \rho^2) [D\alpha_{2N+1}^{(-)}(\frac{\sqrt{2b}}{x}, \rho)]} \Big|_{b=1} \quad (3)$$

В (2) и (3) ρ – максимальная степень линейной поляризации накачки, связанная с A соотношением $\rho^2 = \sqrt{1 - A^2}$. Дифференциальный оператор $D = 1 - d/db + d^2/3db^2$ отвечает наиболее простому случаю l -вырождения электронных состояний в атомах газа до ионизации. Явные выражения функций $\alpha_{2N+1}^{(\pm)}(\sqrt{2b}/x, \rho)$ для гармоник с 3-й по 11-ю приведены в Приложении. Аналитические выражения для $\alpha_3^{(\pm)}$ получены в [3], а для $\alpha_5^{(\pm)}$ и $\alpha_7^{(\pm)}$ – в [4]. В свою очередь функции $\alpha_9^{(\pm)}$ и $\alpha_{11}^{(\pm)}$ представляют собой оригинальный результат и публикуются в этом сообщении впервые. Знание этих функций позволило провести анализ выражений (2) и (3) для эффективности генерации и степени круговой поляризации 9-й и 11-й гармоник и обобщить результаты работ [3–6] на случай высоких гармоник. В этом сообщении рассмотрим общие для различных гармоник свойства эффективности генерации и поляризации излучаемых полей, а также укажем оптимальные условия генерации гармоник с заданной поляризацией.

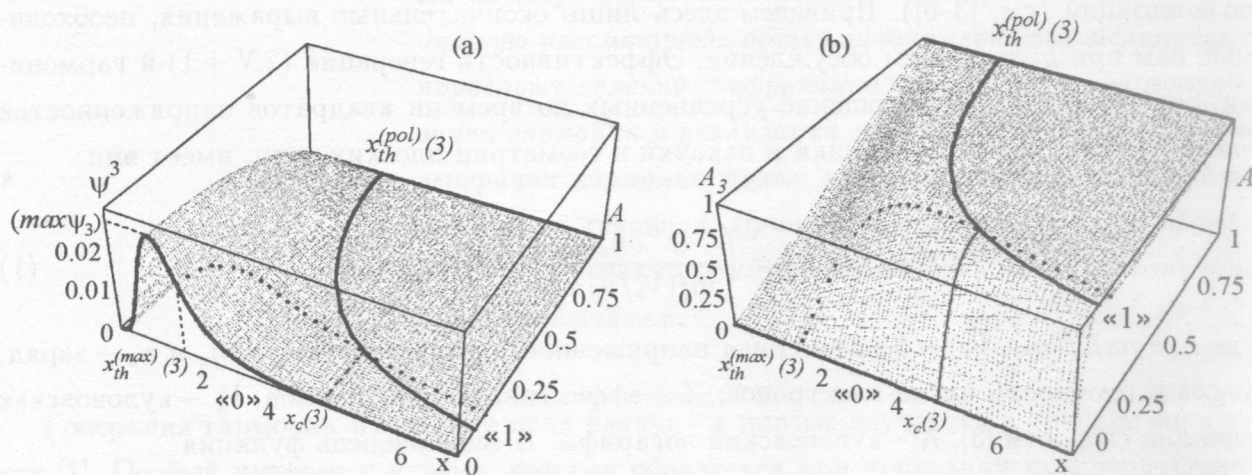


Рис. 1. (а) Трехмерный график зависимости относительной эффективности генерации 3-й гармоники $\Psi_3(x, A)$ от безразмерной напряженности поля накачки x и степени его круговой поляризации A ; (б) Трехмерный график зависимости степени круговой поляризации 3-й гармоники $A_3(x, A)$ от безразмерной напряженности поля накачки x и степени его круговой поляризации A .

На рис. 1(а) приведен трехмерный график зависимости относительной эффективности генерации Ψ_3 от безразмерной напряженности поля накачки x и степени его круговой поляризации A , иллюстрирующий общий для всех гармоник характер этой зависимости. Учитывая свойство четности $\Psi_{2N+1}(x, A) = \Psi_{2N+1}(x, -A)$, достаточно построить график в области $0 \leq A \leq 1$. При фиксированном значении A эффективность генерации гармоники с ростом x вначале возрастает, а затем, достигнув своего максимума, убывает. При $|A| = 1$ функция $\Psi_3(x, \pm 1) \equiv 0$, то есть накачка, поляризованная полностью по кругу, не приводит к генерации гармоники. В области не очень больших напряженностей поля накачки максимальное значение Ψ_3 для фиксированного x достигается для линейно-поляризованной накачки, когда $A = 0$. Ситуация изменяется при превышении напряженностью поля накачки порогового значения $x_{\text{th}}^{(\max)}(2N + 1)$, когда при изменении $|A|$ от 0 до 1 эффективность генерации гармоники сначала возрастает, достигая своего максимального при данном x значения при некоторой, отличной от нуля, степени круговой поляризации $A^{(\max)}(2N + 1, x)$ накачки, а затем спадает до нуля. Иными словами, максимум эффективности генерации реализуется полем накачки с поляризацией, отличной от линейной. Отметим, что таких максимумов два – симметрично для положительного и отрицательного значений A . Точечная кривая на поверхности $\Psi_3(x, A)$ на рис. 1(а) определяет максимальное значение относительной эффективности генерации третьей гармоники в надпороговой области для фиксированного значения $x > x_{\text{th}}^{(\max)}(3)$. Проекция этой кривой на плоскость (x, A) представляет собой график функции $A^{(\max)}(3, x)$.

Другое важное общее свойство генерируемых гармоник – явление бифуркации их полной круговой поляризации. Кратко опишем суть этого явления. Как уже было отмечено выше, поляризованная полностью по кругу накачка с $|A| = 1$ не приводит к генерации гармоник. Однако уже при малом отличии A от ± 1 генерация гармоник становится возможна, степень их круговой поляризации оказывается при этом мало отличающейся от ± 1 . Таким образом, значения степени круговой поляризации накачки $A = \pm 1$ представляют собой пределы генерации гармоник. В таких пределах поле гармоник стремится к полной круговой поляризации, одновременно стремясь по интенсивности к нулю. При малых напряженностях поля накачки x степень круговой поляризации гармоники A_{2N+1} монотонно увеличивается от -1 до $+1$ с ростом A , изменяющегося в тех же пределах. При этом гармоника не становится полностью поляризованной по кругу при $|A| < 1$. С ростом интенсивности накачки ситуация качественно изменяется. При превышении порогового значения $x_{\text{th}}^{(\text{pol})}(2N + 1)$, обусловленного нелинейной

природой взаимодействия накачки с плазмой, зависимость A_{2N+1} от A становится немонотонной и возникает возможность генерации гармоник, полностью поляризованной по кругу $|A_{2N+1}| = 1$ при определенных значениях степени круговой поляризации накачки $-1 < A = A^{(\text{pol})}(2N+1, x) < 1$, соответствующих ее неполной круговой поляризации, что и отвечает явлению бифуркации полной круговой поляризации гармоник. Функция $A^{(\text{pol})}(2N+1, x)$ задает зависимость значения степени круговой поляризации накачки от величины ее напряженности, при которых генерируется гармоника, поляризованная полностью по кругу. Представленный на рис. 1(б) трехмерный график зависимости степени круговой поляризации A_3 от безразмерной напряженности поля накачки x и степени его круговой поляризации A демонстрирует описанное явление бифуркации полной круговой поляризации 3-й гармоники (график может быть продолжен в область $-1 \leq A \leq 0$ с учетом свойства нечетности функции $A_{2N+1}(x, A) = -A_{2N+1}(x, -A)$). Сплошная линия "1" на поверхности функции $A_3(x, A)$ как раз и отвечает полностью поляризованной по кругу 3-й гармонике с $A_3 = +1$. Проекция этой кривой на плоскость (x, A) представляет собой график бифуркационной кривой $A^{(\text{pol})}(3, x)$. Из рис. 1(б) видно, что в надпороговой области $x > x_{\text{th}}^{(\text{pol})}(3)$ с ростом x область значений A , в которой гармоника поляризована почти по кругу, увеличивается, и при достаточно больших x поляризация гармоник A_3 заметно отличается от круговой лишь вблизи $A \approx 0$. Учитывая, что линейно-поляризованная накачка с $A = 0$ приводит к генерации линейно-поляризованной гармоник с $A_{2N+1} = 0$ (см. кривую "0" на рис. 1(б)) последнее означает, что в области больших интенсивностей накачки изменение степени круговой поляризации гармоник от $A_{2N+1} \approx +1$ к $A_{2N+1} \approx -1$ происходит при смене знака A с положительного на отрицательный в малой окрестности $|A| \rightarrow 0$. Таким образом, рис. 1(б) демонстрирует еще два общих для всех гармоник, сопутствующих явлению бифуркации, нелинейных поляризационных свойства: реализацию в определенной достаточно широкой области A приблизительно круговой поляризации гармоник и уменьшение интервала значений A , отвечающих почти линейной поляризации накачки, в котором степень круговой поляризации генерируемой гармоник меняется от величины, близкой к $+1$, до величины, близкой к -1 , с ростом интенсивности накачки. На основе результатов, полученных для 3-й гармоники впервые в [3] для реализации максимума эффективности генерации при нелинейно-поляризованной накачке и в [5] для бифуркации полной круговой поляризации, было высказано предположение об универсальном характере этих пороговых явлений и для других гармоник. Эта гипотеза была подтверждена позже в [4] и [6] для 5-й и 7-й гармоник. Полученные автором статьи и приведенные в настоящем

сообщении оригинальные выражения для $\alpha_9^{(\pm)}$ и $\alpha_{11}^{(\pm)}$ дают в явном аналитическом виде выражения для эффективности генерации (2) и степени круговой поляризации (3) 9-й и 11-й гармоник. Проведенный анализ этих выражений подтверждает универсальность описанных выше пороговых явлений бифуркации для этих гармоник. Более того, отметим, что для другой модели – заранее приготовленной максвелловской плазмы – эти явления описаны в [7] и [8], что является дополнительным указанием на универсальность описанных пороговых явлений для тормозного механизма генерации гармоник вообще, независимо от распределения электронов в плазме. Отметим также, что первое из двух описанных явлений ранее было экспериментально обнаружено в [9].

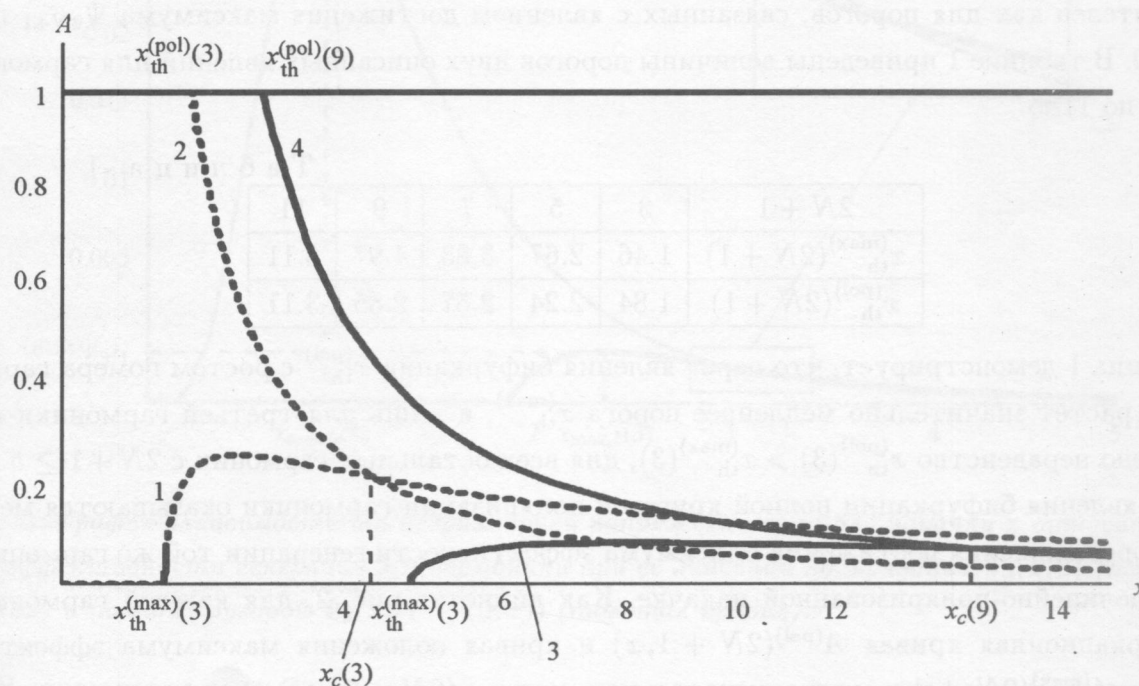


Рис. 2. Графики зависимости от безразмерной напряженности поля накачки x бифуркационной кривой для 3-й $A^{(\text{pol})}(3, x)$ (кривая 2) и 9-й $A^{(\text{pol})}(9, x)$ (кривая 4) гармоник и кривой положения максимума эффективности для тех же гармоник $A^{(\max)}(3, x)$ (кривая 1) и $A^{(\max)}(9, x)$ (кривая 3).

Рисунок 2 иллюстрирует влияние номера гармоники на пороги и характер бифуркационной кривой $A^{(\text{pol})}(2N + 1, x)$ и кривой положения максимума эффективности $A^{(\max)}(2N + 1, x)$. Точечная кривая 1 на этом рисунке – кривая положения максимума эффективности $A^{(\max)}(3, x)$ 3-й гармоники. При $x \leq x_{\text{th}}^{(\max)}(3)$ функция $A^{(\max)}(3, x) = 0$. Над

порогом при $x > x_{\text{th}}^{(\text{max})}(3)$ с ростом x функция $A^{(\text{max})}(3, x)$ вначале возрастает, а затем, достигнув максимального значения, уменьшается. Сплошная кривая 3 рис. 2 отвечает аналогичной зависимости $A^{(\text{max})}(9, x)$ для 9-й гармоники. Из сравнения кривых 1 и 3 видно, что с ростом номера гармоники, во-первых, возрастает порог $x_{\text{th}}^{(\text{max})}(9) > x_{\text{th}}^{(\text{max})}(3)$ описанного явления достижения максимума Ψ_{2N+1} при $A \neq 0$, а во-вторых, уменьшается интервал значений A , в котором возможна такая немонотонная зависимость Ψ_{2N+1} от A . Точечная кривая 2 определяет бифуркационную кривую $A^{(\text{pol})}(3, x)$ для 3-й гармоники, сплошная кривая 4 – аналогичную кривую $A^{(\text{pol})}(9, x)$ для 9-й. С ростом x кривые 2 и 4 монотонно убывают, нигде не пересекаясь и стремясь к нулю. Из рис. 2 видно, что порог явления бифуркации с ростом $2N + 1$ также возрастает, однако этот рост не столь значителен как для порогов, связанных с явлением достижения максимума Ψ_{2N+1} при $A \neq 0$. В таблице 1 приведены величины порогов двух описанных явлений для гармоник с 3-й по 11-ю.

Т а б л и ц а 1

$2N + 1$	3	5	7	9	11
$x_{\text{th}}^{(\text{max})}(2N + 1)$	1.46	2.67	3.83	4.97	6.11
$x_{\text{th}}^{(\text{pol})}(2N + 1)$	1.84	2.24	2.57	2.85	3.11

Таблица 1 демонстрирует, что порог явления бифуркации $x_{\text{th}}^{(\text{pol})}$ с ростом номера гармоники растет значительно медленнее порога $x_{\text{th}}^{(\text{max})}$, и лишь для третьей гармоники выполнено неравенство $x_{\text{th}}^{(\text{pol})}(3) > x_{\text{th}}^{(\text{max})}(3)$, для всех остальных гармоник с $2N + 1 \geq 5$ пороги явления бифуркации полной круговой поляризации гармоники оказываются меньше порога явления достижения максимума эффективности генерации той же гармоники при нелинейно-поляризованной накачке. Как видно из рис. 2, для каждой гармоники бифуркационная кривая $A^{(\text{pol})}(2N + 1, x)$ и кривая положения максимума эффективности $A^{(\text{max})}(2N + 1, x)$ пересекаются при $x = x_c(2N + 1)$. Это означает, что для такой напряженности поля накачки наиболее эффективно генерируется именно полностью поляризованная по кругу гармоника с $|A_{2N+1}| = 1$. Точечная поверхностная кривая на рис. 1(б) как раз и дает изменение степени круговой поляризации наиболее эффективно генерируемой 3-й гармоники $A_3(x, A^{(\text{max})}(3, x))$. Из совместного анализа рис. 1(а) и 1(б) видно, что при $x \leq x_{\text{th}}^{(\text{max})}(3)$ к наиболее эффективной генерации гармоники приводит линейно-поляризованная накачка. При этом поле гармоники также линейно-поляризовано $A_{2N+1} = 0$. Причем именно в этой подпороговой области x при сравнительно небольшой величине напряженности накачки $x_{\text{max},0}(3) < x_{\text{th}}^{(\text{max})}(3)$ достигается абсолютный максимум эффективности генерации $(\max \Psi_3)_0 \equiv \Psi_3(x_{\text{max},0}(3), 0)$.

Индекс “0” подчеркивает, что это реализуется для линейно-поляризованной гармоники $A_3 = 0$. При превышении порога $x_{th}^{(max)}(3)$ степень круговой поляризации наиболее эффективно генерируемой 3-й гармоники быстро возрастает, достигая максимального значения $A_3(x_c(3), A^{(max)}(3, x_c(3)) \equiv A^{(pol)}(3, x_c(3))) = 1$ (пересечение точечной кривой и кривой “1” на рис. 1(б)) при $x = x_c(3)$ и далее медленно уменьшается.

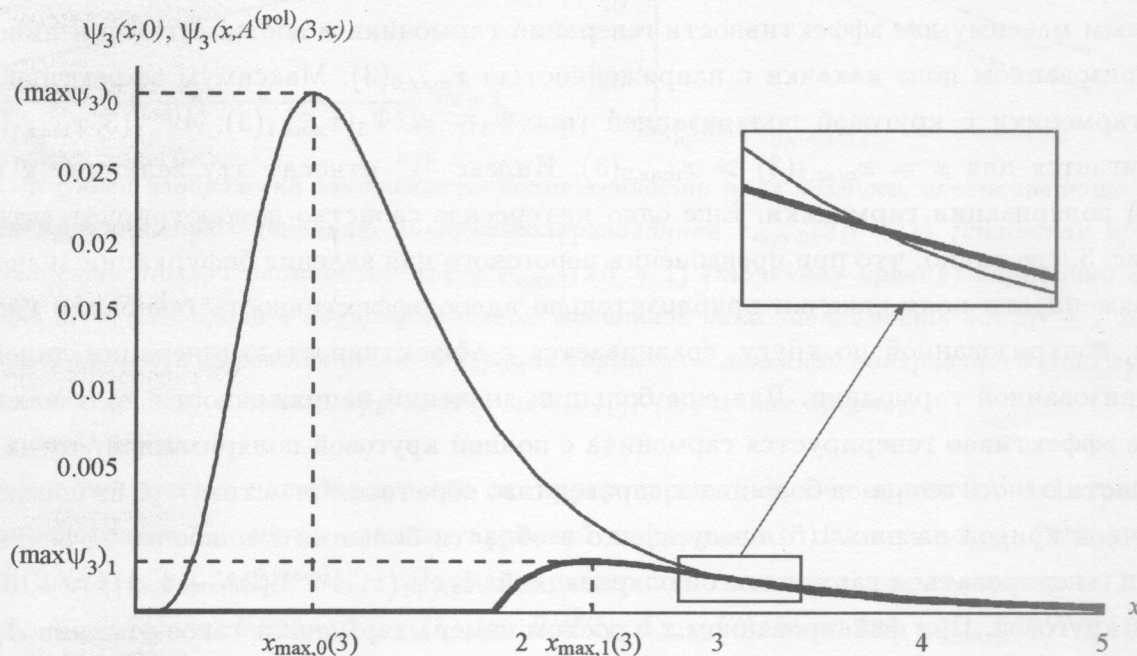


Рис. 3. График зависимости от безразмерной напряженности поля накачки x относительной эффективности генерации 3-й гармоники при ее линейной поляризации $\Psi_3(x, 0)$ (тонкая кривая) и полной круговой $\Psi_3(x, A^{(pol)}(3, x))$ (толстая кривая).

В заключение рассмотрим вопрос о том, как с ростом номера гармоники изменяются условия наиболее эффективной генерации гармоники с фиксированной поляризацией. Как уже отмечалось выше, линейно-поляризованная гармоника $A_{2N+1} = 0$ генерируется линейно-поляризованной накачкой $A = 0$ (см. кривую 0 на рисунке 1(б) для 3-й гармоники), тогда как поляризованная полностью по кругу гармоника $A_{2N+1} = 1$ с ненулевой интенсивностью может быть сгенерирована лишь при превышении порога бифуркации $x > x_{th}^{(pol)}(2N + 1)$ и четком соответствии степени круговой поляризации поля накачки A его напряженности x по закону $A = A^{(pol)}(2N + 1, x)$. Иными словами, надо находиться на бифуркационной кривой. На рис. 1(а) кривая “0” определяет значение относительной эффективности генерации линейно-поляризованной 3-й гармоники. Кривая “1” на

том же рисунке дает значение относительной эффективности генерации 3-й гармоники, полностью поляризованной по кругу. На рис. 3 представлены те же, но уже двухмерные зависимости от x относительной эффективности генерации 3-й гармоники при ее линейной поляризации $\Psi_3(x, 0)$ (тонкая кривая) и полной круговой $\Psi_3(x, A^{(pol)}(3, x))$ (толстая кривая). Обе кривые рис. 3 имеют максимум, причем максимум эффективности генерации линейно-поляризованной гармоники $(\max \Psi_3)_0$ является одновременно и абсолютным максимумом эффективности генерации гармоники и достигается при линейно поляризованном поле накачки с напряженностью $x_{\max,0}(3)$. Максимум эффективности 3-й гармоники с круговой поляризацией $(\max \Psi_3)_1 = \Psi_3(x_{\max,1}(3), A^{(pol)}(3, x_{\max,1}(3)))$ достигается для $x = x_{\max,1}(3) > x_{\max,0}(3)$. Индекс "1" относит эту величину к круговой поляризации гармоники. Еще одно интересное свойство демонстрирует вставка на рис. 3, где видно, что при превышении порогового для явления бифуркации значения напряженности поля накачки приблизительно вдвое эффективность генерации гармоники, поляризованной по кругу, сравнивается с эффективностью генерации линейно-поляризованной гармоники. Для еще больших значений напряженности поля накачки более эффективно генерируется гармоника с полной круговой поляризацией, тогда как в области относительно небольших x справедливо обратное. Отметим, что из поведения точечной кривой на рис. 1(б) следует, что в области больших x наиболее эффективно будет генерироваться гармоника с поляризацией $A_{2N+1}(x, A^{(max)}(2N+1, x)) \approx 1$, близкой к круговой. При фиксированном x с ростом номера гармоники такое отличие A_{2N+1} от 1 становится все меньше.

На левом графике рис. 4 сплошная кривая дает зависимость напряженности поля накачки $x_{\max,0}$, обеспечивающей наиболее эффективную генерацию линейно-поляризованной гармоники, от ее номера $2N+1$. Как видно из этого графика, эта зависимость практически линейна, и с очень высокой точностью ее можно аппроксимировать формулой $x_{\max,0}(2N+1) \simeq x_{\max,0}(3) + C_0 \cdot (2N+1)$, где $x_{\max,0}(3) = 0.915$, а интерполяционный угловой коэффициент $C_0 \approx 0.30$. Точечная кривая левого графика рис. 4 дает зависимость напряженности поля накачки $x_{\max,1}(2N+1)$, обеспечивающей наиболее эффективную генерацию гармоники, поляризованной по кругу. Эта зависимость также с высокой точностью линейна, и аналогично можно записать $x_{\max,1}(2N+1) \simeq x_{\max,1}(3) + C_1 \cdot (2N+1)$, где $x_{\max,1}(3) = 2.354$, а $C_1 \approx 0.58$. Из рис. 4 видно, что для достижения наиболее эффективной генерации линейно-поляризованной гармоники требуются меньшие поля накачки. В отличие от оптимальной генерации линейно-поляризованной гармоники, обеспечиваемой линейно поляризованной-накачкой, для оптимальной ге-

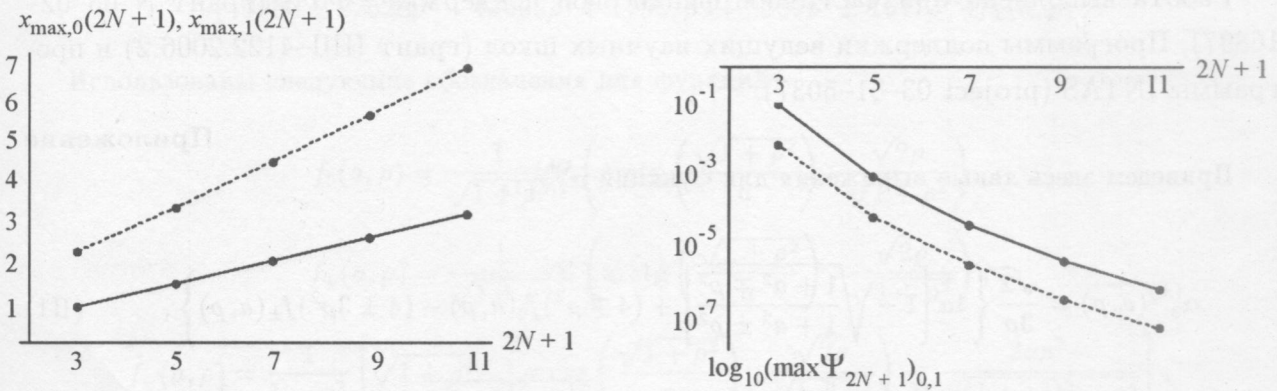


Рис. 4. Слева изображена зависимость напряженности поля накачки, обеспечивающей наиболее эффективную генерацию линейно-поляризованной $x_{\max,0}(2N+1)$ (сплошная кривая) и полностью поляризованной по кругу $x_{\max,1}(2N+1)$ (точечная кривая) гармоники от ее номера $2N+1$. Справа в логарифмическом масштабе дана зависимость от $2N+1$ максимальных значений эффективности генерации гармоник с линейной поляризацией $(\max \Psi_{2N+1})_0$ (сплошная кривая) и полной круговой $(\max \Psi_{2N+1})_1$ (точечная кривая).

генерации полностью поляризованной по кругу гармоники с номером $2N+1$ требуется определенное значение степени круговой поляризации накачки $A_{\max,1}(2N+1) \equiv A^{(\text{pol})}(2N+1, x_{\max,1}(2N+1))$. Приведем здесь эти значения для гармоник с 3-й по 11-ю: $A_{\max,1}(3) = 0.645$, $A_{\max,1}(5) = 0.457$, $A_{\max,1}(7) = 0.348$, $A_{\max,1}(9) = 0.277$, $A_{\max,1}(11) = 0.230$. Таким образом, с ростом номера гармоники максимальная эффективность генерации гармоники, поляризованной по кругу, реализуется для поля накачки, степень круговой поляризации которого меньше. На правом графике рис. 4 в полупологарифмическом масштабе приведены зависимости от номера гармоники максимально возможной относительной эффективности генерации линейно-поляризованной гармоники $(\max \Psi_{2N+1})_0$ (сплошная кривая) и гармоники, поляризованной полностью по кругу $(\max \Psi_{2N+1})_1$. Из рисунка видно, что максимальное значение эффективности генерации линейно-поляризованной гармоники почти на порядок превосходит максимальную эффективность генерации той же гармоники с полной круговой поляризацией, и эта разница практически не зависит от номера гармоники. С ростом $2N+1$ падение эффективности генерации различных гармоник уменьшается. Так отношение максимумов эффективности генерации третьей и пятой гармоник равно 60, тогда как аналогичное отношение для девятой и одиннадцатой гармоник составляет всего лишь коэффициент 5.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 05-02-16897), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4122.2006.2) и программы INTAS (project 03-51-5037).

Приложение

Приведем здесь явные выражения для функций $\alpha_{2N+1}^{(\pm)}$.

$$\alpha_3^{(\pm)}(a, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{3\rho} \left\{ 4a \left[1 - \sqrt{\frac{1+a^2 \mp \rho^2}{1+a^2 \pm \rho^2}} \right] + (4 \mp \rho^2)f_0(a, \rho) - (4 \pm 3\rho^2)f_{\pm}(a, \rho) \right\}, \quad (\text{П1})$$

$$\alpha_5^{(\pm)}(a, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{15\rho^3} \left\{ 4a \left[4a^2 + 3(4 \mp \rho^2) - \sqrt{\frac{1+a^2 \mp \rho^2}{1+a^2 \pm \rho^2}}(4a^2 + 12 \pm \rho^2) \right] + (32 \mp 12\rho^2 - 5\rho^4)f_0(a, \rho) - (32 \pm 20\rho^2 - 9\rho^4)f_{\pm}(a, \rho) \right\}. \quad (\text{П2})$$

$$\alpha_7^{(\pm)}(a, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{105\rho^5} \left\{ 8a \left[18a^4 + 10a^2(6 \mp \rho^2) + 15(6 \mp 2\rho^2 - \rho^4) - 2\sqrt{\frac{1+a^2 \mp \rho^2}{1+a^2 \pm \rho^2}}(9a^4 + (2a^2 + 3)(15 \pm 2\rho^2) - 8\rho^4) \right] + (384 \mp 160\rho^2 - 144\rho^4 \pm 25\rho^6)f_0(a, \rho) - (384 \pm 224\rho^2 - 208\rho^4 \mp 63\rho^6)f_{\pm}(a, \rho) \right\}, \quad (\text{П3})$$

$$\alpha_9^{(\pm)}(a, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{315\rho^7} \left\{ 8a \left[80a^6 + 42a^4(8 \mp \rho^2) + 70a^2(8 \mp 2\rho^2 - \rho^4) + 35(16 \mp 6\rho^2 - 6\rho^4 \pm \rho^6) - 2\sqrt{\frac{1+a^2 \mp \rho^2}{1+a^2 \pm \rho^2}}(40a^6 + a^4(168 \pm 19\rho^2) + 2a^2(140 \pm 29\rho^2 - 18\rho^4) + 280 \pm 47\rho^2 - 110\rho^4 \mp 8\rho^6) \right] + (2048 \mp 896\rho^2 - 1248\rho^4 \pm 336\rho^6 + 75\rho^8)f_0(a, \rho) - (2048 \pm 1152\rho^2 - 1632\rho^4 \mp 624\rho^6 + 147\rho^8)f_{\pm}(a, \rho) \right\}, \quad (\text{П4})$$

$$\alpha_{11}^{(\pm)}(a, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{3465\rho^9} \left\{ 4a \left[2800a^8 + 1440a^6(10 \mp \rho^2) + 3024a^4(10 \mp 2\rho^2 - \rho^4) + 420a^2(80 \mp 24\rho^2 - 24\rho^4 \pm 3\rho^6) + 315(80 \mp 32\rho^2 - 48\rho^4 \pm 12\rho^6 + 3\rho^8) - \sqrt{\frac{1+a^2 \mp \rho^2}{1+a^2 \pm \rho^2}}(2800a^8 + 80a^6(180 \pm 17\rho^2) + 8a^4(3780 \pm 694\rho^2 - 383\rho^4) + 4a^2(8400 \pm 2140\rho^2 - 2572\rho^4 \mp 271\rho^6) + 25200 \pm 4880\rho^2 - 15672\rho^4 \mp 1860\rho^6 + 1023\rho^8) \right] + (40960 \mp 18432\rho^2 - 34816\rho^4 \pm 11232\rho^6 + 5196\rho^8 \mp 675\rho^{10})f_0(a, \rho) - \right\} \quad (\text{П5})$$

$$-(40960 \pm 22528\rho^2 - 43008\rho^4 \mp 17952\rho^6 + 8556\rho^8 \pm 1617\rho^{10})f_{\pm}(a, \rho) \Big\}.$$

Использованы следующие обозначения для функций

$$f_0(a, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \mathbf{F} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{a} \right), \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right),$$

$$f_+(a, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \mathbf{E} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{a} \right), \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right),$$

$$f_-(a, \rho) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\sqrt{1+\rho^2} \mathbf{E} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{a} \right), \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right) - \frac{2a\rho^2}{\sqrt{(1+a^2)^2 - \rho^4}} \right],$$

где $\mathbf{F}(\varphi, k)$ и $\mathbf{E}(\varphi, k)$ – эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 2254 (1964).
- [2] A. V. Fedotov, A. N. Naumov, V. P. Silin, et al. Phys. Lett. A **271**, 407 (2000).
- [3] К. Ю. Вагин, К. Н. Овчинников, В. П. Силин, Квантовая электроника **34**(3), 223 (2004).
- [4] В. П. Силин, П. В. Силин, Квантовая электроника **35**(2), 157 (2005).
- [5] В. П. Силин, П. В. Силин, Квантовая электроника **35**(6), 531 (2005).
- [6] В. П. Силин, П. В. Силин, Квантовая электроника **36**(5), 440 (2006).
- [7] К. Н. Овчинников, В. П. Силин, Квантовая электроника, **29**(2), 145 (1999).
- [8] В. П. Силин, П. В. Силин, Физика плазмы (2007) в печати.
- [9] N. H. Burnett, C. Kan, and P. V. Corkum, Phys. Rev. A **51**, R3418 (1995).

Поступила в редакцию 29 декабря 2006 г.