УДК 530.12:531.51

О ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

М. А. Микаэлян

Проводится построение теории гравитации в рамках плоского пространства Минковского. Найден подход, обеспечивающий однозначность такого построения. Выводимые формулы обладают тем свойством, что по форме совпадают с формулами общей теории относительности.

Согласно общей теории относительности (ОТО) реально наблюдаемая геометрия не является фиксированной характеристикой пространства-времени. Этот факт выражает зависимость метрического тензора g_{ik} от координат x^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ (что и идентифицируется как наличие гравитационного поля). В то же самое время попытки построения лоренц-ковариантной теории гравитации в рамках пространства Минковского с фиксированным метрическим тензором

$$g_{ik} = g^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1}$$

предпринимались со времен создания специальной теории относительности и продолжают предприниматься в настоящее время.

Важный вклад в понимание самой постановки задачи был внесен Тиррингом [1, 2]. Гравитационное поле, обладая универсальным свойством воздействовать на все виды материи, также воздействует и на эталоны (стержни и часы), определяющие само понятие системы отсчета. И если мы проводим построение в рамках плоского пространства, то вытекающие из такого построения реально наблюдаемые метрические соотношения оказываются соответствующими уже не плоскому, а искривленному пространству, и мы, фактически, приходим к ОТО. Сказанное в определенном смысле и увязывает рассмотрение в пространстве Минковского со стандартным рассмотрением ОТО.

В статье найден подход, обеспечивающий однозначность построения лоренц-ковариантного описания гравитационного поля. Последнее "появляется" в процессе построения теории как тензорное поле a_{ik} в пространстве Минковского с метрическим тензором g_{ik} вида (1). Выводимые формулы обладают тем свойством, что после формальных замен

$$a_{ik} \to g_{ik}, \ \tilde{a}^{ik} \to g^{ik}, \ \sqrt{-a} \to \sqrt{-g}, \tag{2}$$

где $\tilde{a}^{ik}$ – тензор, обратный a_{ik}, a и g – определители матриц a_{ik} и g_{ik} соответственно, они принимают вид формул ОТО, в которых g_{ik} – метрический тензор риманова пространства.

При чисто теоретическом построении мы заранее не знаем, какие поля реально существуют. Однако мы знаем, что их наличие должно сводиться к появлению в уравнении движения частицы тех или иных функций x^i. Уравнение движения свободной частицы в форме Гамильтона–Якоби имеет вид

$$g^{ik} p_i p_k - m^2 c^2 = 0, \quad p_i \equiv -\frac{\partial S}{\partial x^i}, \tag{3}$$

где S – действие, p^i – обобщенный импульс, а g^{ik} дается выражением (1). Левая часть уравнения квадратична по обобщенному импульсу. Мы можем "испортить" написанное уравнение, заменив постоянные коэффициенты при разных степенях обобщенного импульса на функции x^i. Таким образом, речь идет о введении в рассмотрение трех полей – скалярного, векторного и тензорного. С точностью до деления обеих частей уравнения на скаляр можно говорить лишь о двух полях – векторном и тензорном. Введение векторного поля можно осуществить проведением в (3) известной замены $p_i \to p_i - \frac{e}{c} A_i$, где A_i называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Введению же тензорного поля (называемого гравитационным) соответствует замена коэффициента при старшей степени обобщенного импульса: $g^{ik} \to \tilde{a}^{ik}$, где для удобства дальнейшего изложения тензорное поле $\tilde{a}^{ik}$ считается обратным к некоторому другому тензорному полю a_{ik} ($a_{ij}\tilde{a}^{jk} = \delta_i^k$). После указанных замен (3) принимает вид:

$$\tilde{a}^{ik} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right) - m^2 c^2 = 0. \tag{4}$$

Уместно напомнить, что связь компонент обобщенного импульса составляет основу для перехода к квантовой механике, осуществляемого посредством замены $p_i \to \hat{p}_i =$

$i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Не вдаваясь в подробности, отметим, что для существования сохраняющегося 4-тока (что необходимо для квантово-механического описания частицы) перед указанной заменой в соотношении (4) тензор $\tilde{a}^{ik}$ следует поместить посередине между круглыми скобками. В итоге получается уравнение Клейна–Гордона в присутствии электромагнитного и гравитационного полей (и ему соответствует сохраняющийся 4-ток $\mathcal{J}^i$, $\dfrac{\partial \mathcal{J}^i}{\partial x^i} = 0$):

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{e}{c}A_i\right)\tilde{a}^{ik}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{e}{c}A_k\right)\Psi - m^2c^2\Psi = 0;$$

$$\mathcal{J}^i = \frac{i\hbar}{2m}\tilde{a}^{ik}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^k}\right) - \frac{e}{mc}\Psi^*\Psi\tilde{a}^{ik}A_k. \qquad (5)$$

Это уравнение может быть получено и как условие экстремальности действия $S = \dfrac{1}{c}\int L d^4x$ ($d^4x = cdtdxdydz$), где лагранжиан L дается выражением

$$L = -\frac{1}{2m}\left[\tilde{a}^{ik}\left(i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\Psi^*\right)\left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} - \frac{e}{c}A_k\Psi\right) + m^2c^2\Psi^*\Psi\right] \qquad (6)$$

(в отсутствие полей L принимает известный вид и соответствует свободной бесспиновой частице). По поводу сказанного заметим, что при последовательном квантово-механическом рассмотрении выражение для лагранжиана L является первичным элементом в описании частицы, так что именно через L (а не через связь компонент p_i) следует вводить в рассмотрение поля.

Теперь "восстановим" выражение для действия S (классической) частицы. Конкретно, покажем, что связь компонент обобщенного импульса, даваемая (4), обеспечивается следующим выражением для действия[1]:

$$S = -mc\int \sqrt{a_{ik}dx^i dx^k} - \frac{e}{c}\int A_i dx^i \qquad (7)$$

(в отсутствие гравитационного поля a_{ik} равно g_{ik} (1) и, с учетом $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, первое слагаемое принимает известный вид $-mc\int ds$). Вычисление вариации действия δS (соответствующей варьированию мировой линии) проводится точно так же, как и в отсутствие гравитационного поля, когда $a_{ik} = g_{ik}$ (см. [3, §23]). Если начальную и

[1] После замен (2) выражение (7) принимает вид действия ОТО, в котором g_{ik} – метрический тензор риманова пространства.

конечную точки мировой линии считать "закрепленными", то из требования $\delta S = 0$ получается уравнение движения[2]:

$$mc\frac{d}{ds}\left(\frac{a_{il}u^l}{\sqrt{a_{st}u^s u^t}}\right) = mc\frac{u^k u^l}{2\sqrt{a_{st}u^s u^t}}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} + \frac{e}{c}u^k F_{ik}, \tag{8}$$

где $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$ – элемент "длины" мировой линии, $u^i \equiv \dfrac{dx^i}{ds}$ – 4-скорость ($u^i u_i = 1$), $F_{ik} \equiv \dfrac{\partial A_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ – тензор электромагнитного поля; в отсутствие гравитационного поля $a_{ik} = g_{ik}$, где g_{ik} дается (1), и (8) принимает известный вид $mc\dfrac{du_i}{ds} = \dfrac{e}{c}u^k F_{ik}$. Если же "закреплена" лишь начальная точка мировой линии, но сама мировая линия удовлетворяет уравнению движения, то $\delta S = -\left(mc\dfrac{a_{il}u^l}{\sqrt{a_{st}u^s u^t}} + \dfrac{e}{c}A_i\right)\delta x^i$ (δx^i – вариация конечной точки мировой линии), и для обобщенного импульса $p_i \equiv -\partial S/\partial x^i$ получаем: $p_i = mc\dfrac{a_{il}u^l}{\sqrt{a_{st}u^s u^t}} + \dfrac{e}{c}A_i$ (при $a_{ik} = g_{ik}$, где g_{ik} дается (1), это выражение принимает известный вид $p_i = mcu_i + \dfrac{e}{c}A_i$). С использованием $u^i u_i = 1$ и $a_{ij}\tilde{a}^{jk} = \delta_i^k$ убеждаемся, что компоненты p_i действительно связаны соотношением (4).

Перейдем к рассмотрению непрерывно распределенной материи (что необходимо для вывода уравнений полей). Будем считать, что масса m и заряд e "размазаны" в пространстве с плотностями ρ_m и ρ_e соответственно, через которые выражаются 4-токи массы и заряда J^i и j^i: $m = \int \rho_m d^3x$, $e = \int \rho_e d^3x$; $J^i = \rho_m\dfrac{dx^i}{dt}$, $j^i = \rho_e\dfrac{dx^i}{dt}$. С учетом этих соотношений (7) принимает вид

$$S = -\int \sqrt{a_{ik}J^i J^k}d^4x - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i d^4x. \tag{9}$$

Для однозначности данного выражения необходимо задать связь между J^i и j^i. Пусть $\rho_e/\rho_m = e/m$; тогда $j^i = (e/m)J^i$. После подстановки в (9) действие S оказывается функционалом J^i. Для вывода уравнения движения материи следует приравнять нулю

---

[2]Уравнение (8) может быть записано в виде $mc\left[\dfrac{d\tilde{u}^j}{d\tilde{s}} + \Gamma^j_{kl}\tilde{u}^k\tilde{u}^l\right] = \dfrac{e}{c}\tilde{u}^k\tilde{a}^{ji}F_{ik}$, где введены обозначения $d\tilde{s} \equiv \sqrt{a_{st}dx^s dx^t}$, $\tilde{u}^i \equiv dx^i/d\tilde{s}$, $\Gamma^j_{kl} \equiv \dfrac{1}{2}\tilde{a}^{ji}\left(\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} + \dfrac{\partial a_{il}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial a_{kl}}{\partial x^i}\right)$. После замен (2) это уравнение принимает вид уравнения движения ОТО, в котором g_{ik} – метрический тензор риманова пространства.

вариацию δS, соответствующую вариациям δJ^i, не нарушающим уравнение непрерывности $\frac{\partial J^i}{\partial x^i}=0$ (выражающее сохранение массы m). Это дополнительное условие можно учесть, добавив к S (9) слагаемое $\int \lambda \frac{\partial J^i}{\partial x^i} d^4x$ (λ – множитель Лагранжа), после чего вариации δJ^i считать произвольными. С учетом всего сказанного следует варьировать величину

$$S=\int\left[-\sqrt{a_{ik}J^iJ^k}-\frac{e}{mc^2}A_iJ^i+\lambda\frac{\partial J^i}{\partial x^i}\right]d^4x. \qquad (10)$$

Варьируя J^i (и беря интеграл от третьего слагаемого по частям), а затем требуя $\delta S=0$, находим: $\frac{a_{il}J^l}{\sqrt{a_{st}J^sJ^t}}+\frac{e}{mc^2}A_i=-\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}$. С учетом $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i\partial x^k}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^k\partial x^i}$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{a_{il}J^l}{\sqrt{a_{st}J^sJ^t}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{a_{kl}J^l}{\sqrt{a_{st}J^sJ^t}}\right)+\frac{e}{mc^2}F_{ik}. \qquad (11)$$

Помножив обе части этого соотношения на J^k и (с учетом $\frac{\partial J^k}{\partial x^k}=0$) внеся J^k под знак дифференцирования (такая форма записи понадобится в дальнейшем), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{a_{il}J^lJ^k}{\sqrt{a_{st}J^sJ^t}}\right)=\frac{J^kJ^l}{2\sqrt{a_{st}J^sJ^t}}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}j^kF_{ik}, \qquad (12)$$

которое определяет движение отдельных точек непрерывно распределенной материи (если J^k не вносить под знак дифференцирования, то, с учетом $u^k=J^k/\sqrt{J^sJ_s}$ и $u^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{d}{ds}$, уравнение приводится к виду (8)).

Заметим, что при умножении соотношения (11) на J^k часть информации теряется, причем эта информация имеет чисто квантовое происхождение! Дело в том, что выражение для действия классической непрерывно распределенной материи не может в общем виде быть записано через ток J^i. Выражение же (9), строго говоря, соответствует тому, что вначале проводится квантово-механическое рассмотрение частицы, при котором последней отвечает сохраняющийся 4-ток $\mathcal{J}^i$ ($\frac{\partial \mathcal{J}^i}{\partial x^i}=0$, $\int \mathcal{J}^0d^3x=1$; соответственно, $J^i=m\mathcal{J}^i$, $j^i=e\mathcal{J}^i$), а затем проводится переход к пределу $\hbar\to 0$; в классическом пределе, как известно, мы отнюдь не приходим к классическому понятию точечной частицы, а вместо этого имеем (с формальной точки зрения) течение сплошной среды, вариацию δS, соответствующую вариациям δJ^i, не нарушающим уравнение непрерывности $\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0$ (выражающее сохранение массы m). Это дополнительное условие можно учесть, добавив к S (9) слагаемое $\int \lambda \frac{\partial J^i}{\partial x^i} d^4x$ (λ – множитель Лагранжа), после чего вариации δJ^i считать произвольными. С учетом всего сказанного следует варьировать величину

$$S = \int \left[-\sqrt{a_{ik} J^i J^k} - \frac{e}{mc^2} A_i J^i + \lambda \frac{\partial J^i}{\partial x^i} \right] d^4x. \tag{10}$$

Варьируя J^i (и беря интеграл от третьего слагаемого по частям), а затем требуя $\delta S = 0$, находим: $\frac{a_{il} J^l}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} + \frac{e}{mc^2} A_i = -\frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$. С учетом $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^k \partial x^i}$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{a_{il} J^l}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{a_{kl} J^l}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \right) + \frac{e}{mc^2} F_{ik}. \tag{11}$$

Помножив обе части этого соотношения на J^k и (с учетом $\frac{\partial J^k}{\partial x^k} = 0$) внеся J^k под знак дифференцирования (такая форма записи понадобится в дальнейшем), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{a_{il} J^l J^k}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \right) = \frac{J^k J^l}{2\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} j^k F_{ik}, \tag{12}$$

которое определяет движение отдельных точек непрерывно распределенной материи (если J^k не вносить под знак дифференцирования, то, с учетом $u^k = J^k / \sqrt{J^s J_s}$ и $u^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{d}{ds}$, уравнение приводится к виду (8)).

Заметим, что при умножении соотношения (11) на J^k часть информации теряется, причем эта информация имеет чисто квантовое происхождение! Дело в том, что выражение для действия классической непрерывно распределенной материи не может в общем виде быть записано через ток J^i. Выражение же (9), строго говоря, соответствует тому, что вначале проводится квантово-механическое рассмотрение частицы, при котором последней отвечает сохраняющийся 4-ток $\mathcal{J}^i$ ($\frac{\partial \mathcal{J}^i}{\partial x^i} = 0$, $\int \mathcal{J}^0 d^3x = 1$; соответственно, $J^i = m\mathcal{J}^i$, $j^i = e\mathcal{J}^i$), а затем проводится переход к пределу $\hbar \to 0$; в классическом пределе, как известно, мы отнюдь не приходим к классическому понятию точечной частицы, а вместо этого имеем (с формальной точки зрения) течение сплошной среды, точки которой движутся по классическим траекториям[3].

Выражением сказанного ранее является тот факт, что течение, удовлетворяющее (11), обладает некоторыми свойствами, которыми истинно классическое течение сплошной среды обладать не обязано. Так, в отсутствие полей ($a_{ik} = g_{ik}$, $F_{ik} = 0$) (11) принимает вид $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^k} = \dfrac{\partial u_k}{\partial x^i}$ (где u^i – 4-скорость), и для $i, k = 1, 2, 3$ получаем: $\mathrm{rot}\left(\dfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0$; в частности, в нерелятивистском пределе ($c \to \infty$) $\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$, то есть течение обязано быть потенциальным[4].

Итак, если в качестве действия принимается выражение (9), то это автоматически означает, что мы имеем дело с классическим пределом ($\hbar \to 0$) квантово-механического описания точечной частицы[5].

Перейдем к выводу уравнений гравитационного поля. Чтобы упростить рассмотрение, введем тензор α_{ik}, параметризующий "основной" тензор a_{ik}:

$$a_{kl} = \alpha_k^j \alpha_{jl}. \tag{13}$$

Ограничиваясь случаем "чистой" гравитации ($j^i = 0$), для полного действия (с учетом (9)) будем иметь

---

[3]При квантово-механическом рассмотрении, как отмечалось, следует исходить из выражения $S = \dfrac{1}{c}\int L d^4x$, где L дается (6). Далее следует L выразить через $n \equiv \Psi^*\Psi$, $J^i \equiv m\mathcal{J}^j$, где $\mathcal{J}^i$ дается (5), и $\lambda \equiv \dfrac{\hbar}{mc}\phi$ (ϕ – фаза волновой функции) и затем перейти к пределу $\hbar \to 0$. Требование $\delta S = 0$ при варьировании n ведет к соотношению, позволяющему выразить n через J^i, после чего S принимает вид (10).

[4]Если же "идти от квантовой механики" и под течением понимать эволюцию плотности вероятности ρ, то в случае свободной нерелятивистской частицы $\rho = |\Psi|^2$, $\mathcal{J} = \dfrac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$ и для "скорости течения" $\mathbf{v} \equiv \mathcal{J}/\rho$ имеем $\mathbf{v} = \dfrac{\hbar}{m}\nabla\phi$ (ϕ – фаза волновой функции), то есть $\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$; это условие остается в силе и в пределе $\hbar \to 0$.

[5]С учетом правила (2) перехода к ОТО первое слагаемое в действии (9) принимает вид $-\int \sqrt{g_{ik}J^iJ^k}d^4x$. Такое выражение использовалось Дираком [4], однако при этом рассматривались не произвольные вариации δJ^i (удовлетворяющие уравнению непрерывности), а лишь вариации вида $\delta J^I = \dfrac{\partial}{\partial x^k}(J^i b^k - J^k b^i)$ (где b^i – произвольная функция x^i). Как следствие, требование $\delta S = 0$ приводило лишь к уравнению движения точек сплошной среды (аналог (12)), а часть информации квантового происхождения оказывалась скрытой.

$$S = -\int \sqrt{a_{kl} J^k J^l} d^4x + \frac{1}{c} \int L_{(g)} \left(\alpha_{jk}, \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x^n} \right) d^4x, \ L_{(g)} = B^{lmn\lambda\mu\nu} \frac{\partial \alpha_{lm}}{\partial x^n} \frac{\partial \alpha_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}, \tag{14}$$

где $L_{(g)}$ – лагранжиан гравитационного поля, который "как всегда" считается квадратичным по первым производным полевых функций, а $B^{lmn\lambda\mu\nu}$ – тензор, как-то выражающийся через α_{ik}. Подчеркнем, что наблюдаемой величиной (фигурирующей в уравнении движения) является тензор a_{ik}, а не тензор α_{ik}, играющий роль вспомогательного параметра. Соответственно, полевое слагаемое в (14) обязано будет приводиться к виду $\frac{1}{c} \int L_{(g)} \left(a_{jk}, \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^n} \right) d^4x$.

Требование $\delta S = 0$ при варьировании α_{kl} в (14) ведет к уравнению поля

$$\frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}} = -c \frac{\alpha_l^j J^l J^k}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}}. \tag{15}$$

Уравнение движения (12) для случая $j^i = 0$ и с учетом (13) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{a_{il} J^l J^k}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \right) = \frac{\alpha_l^j J^l J^k}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}} \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x^i}. \tag{16}$$

Из уравнений (15) и (16) вытекает закон сохранения энергии-импульса:

$$\frac{\partial (T_i^k + t_i^k)}{\partial x^k} = 0, \ T_i^k \equiv c \frac{a_{il} J^l J^k}{\sqrt{a_{st} J^s J^t}}, \ t_i^k \equiv \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial x^i} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jn}/\partial x^k)} - \delta_i^k L_{(g)}, \tag{17}$$

где T_i^k и t_i^k – тензоры энергии-импульса материи и гравитационного поля.

После умножения на $-\alpha_{ji}$ уравнение поля (15) принимает вид

$$-\alpha_{ji} \left[\frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}} \right] = T_i^k, \tag{18}$$

где T_i^k дается (17). Подставив в первое из соотношений (17) вместо T_i^k левую часть (18) и t_i^k, даваемое третьим из соотношений (17), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ -\alpha_{ji} \left[\frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}} \right] + \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial x^i} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jn}/\partial x^k)} - \delta_i^k L_{(g)} \right\} = 0. \tag{19}$$

Это чисто полевое соотношение. Чтобы не возникало противоречия с уравнением поля (18), оно должно выполняться тождественно[6], что, в свою очередь, позволяет найти явный вид лагранжиана $L_{(g)}$. Решение этой задачи хотя и простое, но весьма громоздкое. В конечном итоге получается:

$$L_{(g)} = A^{l\lambda}_{pq\sigma\tau}\sqrt{-a}\tilde{\alpha}^{mp}\tilde{\alpha}^{nq}\tilde{\alpha}^{\mu\sigma}\tilde{\alpha}^{\nu\tau}\frac{\partial\alpha_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial\alpha_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}, \tag{20}$$

$(\alpha_{ij}\tilde{\alpha}^{jk} = \delta^k_i)$, где $A^{l\lambda}_{pq\sigma\tau}$ – числовой тензор, антисимметричный по индексам (p,q) и (σ,τ) и симметричный относительно замен $(l,p,q) \leftrightarrow (\lambda,\sigma,\tau)$. Будучи числовым, этот тензор может выражаться только через g_{ik} (1) и δ^k_i, и, с учетом указанных его свойств, он имеет вид:

$$A^{l\lambda}_{pq\sigma\tau} = \mathrm{const}[g^{l\lambda}(g_{p\sigma}g_{q\tau} - g_{p\tau}g_{q\sigma}) + b_1(\delta^l_\sigma\delta^\lambda_p g_{q\tau} - \delta^l_\sigma\delta^\lambda_q g_{p\tau} - \delta^l_\tau\delta^\lambda_p g_{q\sigma} + \delta^l_\tau\delta^\lambda_q g_{p\sigma}) +$$

$$+ b_2(\delta^l_p\delta^\lambda_\sigma g_{q\tau} - \delta^l_q\delta^\lambda_\sigma g_{p\tau} - \delta^l_p\delta^\lambda_\tau g_{q\sigma} + \delta^l_q\delta^\lambda_\tau g_{p\sigma})],$$

где $b_{1,2}$ – численные коэффициенты, а значение const определяется из рассмотрения ньютоновского предела теории.

Придавая коэффициентам $b_{1,2}$ те или иные численные значения, мы будем получать различные выражения для лагранжиана $L_{(g)}$ (20) и, соответственно, различные формы уравнения поля (18). Попутно заметим, что среди указанных вариантов по многим критериям выделяется случай $b_1 = b_2 = 0$: лагранжиан $L_{(g)}$ (20) имеет вид $L_{(g)} = \dfrac{c^4}{16\pi\gamma}\sqrt{-a}\tilde{a}^{m\mu}\tilde{a}^{n\nu}G_{lmn}G^l_{\mu\nu}$, где $G_{lmn} \equiv \dfrac{\partial\alpha_{ln}}{\partial x^m} - \dfrac{\partial\alpha_{lm}}{\partial x^n}$, γ –гравитационная постоянная, и уравнение поля (18) для такого $L_{(g)}$ выглядит особенно просто. Указанные варианты, однако, нефизичны, так как α_{ik} – величина ненаблюдаемая[7]. Наблюдаемой же величиной (фигурирующей в уравнении движения) является тензор a_{ik} (13), и чтобы уравнение поля содержало именно a_{ik} (а не α_{ik}), лагранжиан (с точностью до 4-дивергенции) должен выражаться через a_{ik}. Нетрудно показать, что последнее имеет место лишь если $b_1 = 1$, $b_2 = -2$. В конечном итоге для $L_{(g)}$ получается выражение, совпадающее с точностью до замен (2) с соответствующим аналогом из ОТО:

---

[6] Тождественная выполнимость (19) означает, что уравнение движения материи (16) содержится в уравнении поля (15) (известное в ОТО свойство гравитационного поля).

[7] Впрочем, некоторые аргументы в пользу наблюдаемости α_{ik} имеются. Вопрос о принципиальной наблюдаемости компонент указанного тензора будет затронут в следующей публикации.

$$L_{(g)} = -\frac{c^4}{16\pi\gamma}\sqrt{-a}\tilde{a}^{mn}(\Gamma^{\mu}_{m\nu}\Gamma^{\nu}_{n\mu} - \Gamma^{\mu}_{mn}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}),\ \Gamma^{\mu}_{mn} \equiv \frac{1}{2}\tilde{a}^{\mu l}\left(\frac{\partial a_{lm}}{\partial x^n} + \frac{\partial a_{ln}}{\partial x^m} - \frac{\partial a_{mn}}{\partial x^l}\right).$$

Для такого $L_{(g)}$ уравнение поля (18) имеет вид

$$\sqrt{-a}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}a_{ik}R\right) = \frac{8\pi\gamma}{c^4}a_{kj}T^k_i, \tag{21}$$

где $R_{ik} \equiv \left(\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{ik}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\nu}_{i\nu}}{\partial x^k} + \Gamma^{\mu}_{ik}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{k\mu}\right)$, $R \equiv \tilde{a}^{ik}R_{ik}$, и после замен (2), а также замены $T_{ik} \to T_{ik}/\sqrt{-g}$, оно принимает вид уравнения Эйнштейна (в котором g_{ik} – метрический тензор риманова пространства).

В присутствии электромагнитного взаимодействия к выражению (9) для действия добавляется не только гравитационное полевое слагаемое, но и слагаемое $\frac{1}{c}\int L_{(em)}d^4x$, где лагранжиан электромагнитного поля дается выражением $L_{(em)} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-a}\tilde{a}^{m\mu}\tilde{a}^{n\nu}F_{mn}F_{\mu\nu}$. Из условия $\delta S = 0$ при варьировании A_i получаются уравнения Максвелла в присутствии гравитации: $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-a}\tilde{a}^{i\mu}\tilde{a}^{k\nu}F_{\mu\nu}) = -\frac{4\pi}{c}j^i$ (после замен (2), а также замены $j^i \to j^i/\sqrt{-g}$, они принимают известный вид уравнений Максвелла в римановом пространстве). Уравнение гравитационного поля (21) будет выглядеть так же, но тензор энергии-импульса будет иметь вид

$$T^k_i = c\frac{a_{il}J^lJ^k}{\sqrt{a_{st}J^sJ^t}} + \frac{\sqrt{-a}}{4\pi}\left[-\tilde{a}^{k\mu}\tilde{a}^{n\nu}F_{in}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\delta^k_i\tilde{a}^{m\mu}\tilde{a}^{n\nu}F_{mn}F_{\mu\nu}\right].$$

В заключение подчеркнем, что построение теории гравитации в рамках плоского пространства не должно рассматриваться как противопоставление ОТО – вытекающие из такого построения наблюдаемые метрические соотношения соответствуют не плоскому, а риманову пространству ОТО, что, как уже упоминалось, было показано Тиррингом [1, 2].

Однако, проводя построение в плоском пространстве, мы заранее не знаем, каким является гравитационное поле (скалярным, векторным или тензорным, см. в связи с этим работу Гупты [5]). Кроме того, даже если мы считаем его тензорным полем, то выражение для действия материи в таком поле может быть записано бесчисленным числом способов; исключение составляет случай линейного приближения теории, рассмотренный Тиррингом [1, 2]. Внести же однозначность в построение нам удалось посредством предварительного решения вопроса о том, как в присутствии полей выглядит связь компонент обобщенного импульса p_i – с эвристической точки зрения эта связь имеет особый статус, так как служит основой для перехода к квантовой механике. Фактически, мы потребовали, чтобы уравнение квантовой механики было линейным дифференциальным уравнением в частных производных не выше второго порядка. Соответственно, поля могут входить в связь (3) компонент p_i через зависимость от x^i коэффициентов при трех степенях p_i. При этом оказывается возможным ввести в рассмотрение лишь два поля – векторное и тензорное, называемые (по определению) электромагнитным и гравитационным соответственно. Имея связь (4) компонент p_i, мы "восстановили" выражение для действия S (7).

Что же касается полевой части действия, то и она определяется однозначно (если не считать общепринятого требования квадратичности лагранжиана по первым производным полевых функций). Специфика тензорного поля такова, что из уравнений движения материи и поля оказывается возможным "исключить" материю. Получаемое соотношение (19) во избежание противоречивости ("перегружения") теории должно выполняться тождественно, что, в свою очередь, позволяет найти явный вид лагранжиана гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Thirring. Fortschr. Phys. **7**, 79 (1959).

[2] W. Thirring. Ann. Phys. (USA) **16**, 96 (1961).

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля (Москва, Наука, 1973).

[4] П. А. М. Дирак. Общая теория относительности (Москва, Атомиздат, 1978).

[5] S. N. Gupta. Rev. Mod. Phys. **29**, 334 (1957).

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 14 августа 2007 г.