

УДК 534.18; 534.1

## ГЕТЕРОГЕННЫЕ СРЕДЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ АКУСТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Е. А. Виноградов, Н. В. Суязов, К. Ф. Шипилов

*Проанализированы условия реализации и параметры акустических сред, подходящих для проявления эффекта отрицательного преломления звуковых волн, обусловленного многократным резонансным рассеянием на сферических включениях. Рассчитаны частотные диапазоны резонансных окон прозрачности, в которых величины эффективных сжимаемости и плотности принимают отрицательные значения и достаточно мал относительный уровень излучательных потерь.*

В последние десять лет большое внимание уделяют искусственным средам с отрицательным показателем преломления, которые обладают рядом уникальных свойств [1, 2]. Впервые концепция сред, обладающих в электромагнитном диапазоне волн одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостями ( $\epsilon$  и  $\mu$ ) была предложена в работе В. Г. Веселаго [3], где отмечено, что такая изотропная среда будет иметь отрицательный показатель преломления в некотором частотном диапазоне. При прохождении волновым пучком границы раздела такой среды со средой с традиционным положительным показателем преломления, согласно закону Снеллиуса, падающий и преломленный пучки будут расположены по одну сторону от нормали к поверхности раздела двух сред. Здесь отрицательное преломление обусловлено тем, что как показано в [3], волновой вектор электромагнитной волны направлен антипараллельно вектору Пойтинга. Впервые основные положения работы [3] были экспериментально подтверждены в [4, 5], где сообщалось о практической реализации композитных материалов, необычные электродинамические свойства которых в сантиметровом диапазоне длин волн могут быть хорошо объяснены, если принять, что коэффициент преломления таких материалов отрицателен. После этой публикации появилось большое количество

работ, например [6–8], где исследовали свойства веществ с отрицательным коэффициентом преломления в СВЧ и оптическом диапазонах длин волн и оценивали их возможные практические применения.

Необходимо отметить, что отрицательное преломление можно наблюдать также в таких средах как фотонные или фононные кристаллы, в условиях брегговского рассеяния в некоторых зонах Бриллюэна, однако эти среды не тождественны средам с двумя отрицательными проницаемостями, но близки к ним по некоторым свойствам и проявлениям.

В работе [9] теоретически рассмотрена возможность создания композиционных сред, которые будут обладать в акустическом диапазоне длин волн одновременно отрицательными значениями эффективной плотности и эффективной объемной упругости. В такой среде формально определенный вектор Пойтинга и волновой вектор для акустической волны будут иметь противоположные направления. Физически это означает, что среда должна обладать одновременно двумя аномальными характеристиками в некотором частотном диапазоне: она расширяется при сжатии (отрицательная объемная упругость) и движется, например, налево, когда ее толкают направо (отрицательная плотность). В [9] теоретически показано, что такую среду можно реализовать с помощью сфер из мягкой резины, распределенных в воде. В условиях резонанса на низких частотах, когда длина волны внутри резиновой сферы сравнима с ее характерными размерами, а длина волны в окружающей сферу водной среде много больше средних расстояний между сферами, могут наблюдаться монополярные и дипольные резонансы Ми и становится возможной реализация отрицательной эффективной упругости и отрицательной эффективной плотности. В работе [9], используя метод когерентного потенциала [10], получены соотношения, описывающие поведение параметров среды в условиях монополярного и дипольного резонансов. Выполнены оценки для сфер из очень мягкой силиконовой резины (модуль объемной упругости  $\kappa \sim 6.27 \cdot 10^5$  Па, плотность  $\rho \sim 1300$  кг·м<sup>-3</sup>) распределенных в воде с коэффициентом заполнения  $\sim 0.1$ , которые показали, что в некотором узком диапазоне частот, но выше частот монополярного и дипольного резонансов, реализуются отрицательные значения модуля объемной упругости и плотности. Монополярный резонанс создает отрицательный отклик среды, так что объемное расширение сферы происходит в противофазе с полем гидростатического давления. Дипольный резонанс происходит так, что движение центра масс сферы осуществляется в противофазе с полем падающей волны акустического давления. Кроме того, в [9] проведены расчеты зон с отрицательными параметрами для коллоидного

кристалла, образованного восемью слоями сфер из силиконовой резины в воде.

К сожалению, сплошные резины с такими низкими модулями объемной упругости уникальны, поэтому были проведены уточнения полученных в [9] соотношений и сделаны оценки частотных зависимостей параметров композиционных сред со сферами из других материалов.

Расчет области проявления отрицательного преломления акустических волн в жидкой среде со сферическими включениями мы выполняем на основе результатов, приведенных в работе [9], где представлены формулы для эффективного модуля объемной упругости  $\kappa_{\text{eff}}$  и эффективной плотности  $\rho_{\text{eff}}$ , полученные для такой среды в рамках приближения эффективного когерентного потенциала [10]:

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{\omega^3 R^3}{\omega^3 R^3 - 3i c_m^3 f D_0} \kappa_m, \quad (1)$$

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\omega^3 R^3 - 3i f c_m^3 D_1}{\omega^3 R^3 + 6i f c_m^3 D_1} \rho_m. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa_m$  и  $\rho_m$  – модуль объемной упругости и плотность окружающей жидкой среды;  $R$  и  $f$  – радиус и объемный коэффициент заполнения сферических включений (отношение объема, занятого включениями к объему среды);  $c_m = \sqrt{\kappa_m / \rho_m}$  – скорость звуковой волны, распространяющейся в чистой жидкой среде, свободной от включений;  $D_0$  и  $D_1$  – коэффициенты рассеяния плоской акустической волны на одном сферическом включении в жидкой среде в монопольное и дипольное излучения, соответственно. Эти коэффициенты рассеяния с точностью до множителя  $i\omega/c_m$  совпадают с коэффициентами разложения  $d_n$  амплитуды рассеяния  $d(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) d_n P_n(\cos\theta)$  по полиномам Лежандра,  $D_n = i\omega c_m^{-1} d_n$ , для  $n = 0, 1$ .

Явление отрицательного преломления может проявляться в некоторой частотной полосе при условии, если в этой полосе действительные части эффективных величин  $\kappa_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$  одновременно принимают отрицательные значения. Для выполнения условия двойной отрицательности частота акустической волны должна попасть в области резонансов монопольного и дипольного типа.

Поскольку величина коэффициента объемного заполнения  $f$  ограничена сверху, для смены знака  $\text{Re}(\kappa_{\text{eff}})$  и  $\text{Re}(\rho_{\text{eff}})$  требуется достаточно большое резонансное значение величин коэффициентов рассеяния  $D_{0,1}$ , то есть высокая добротность соответствующих резонансов и, следовательно, малые потери на излучение; при этом первое слагаемое  $\text{Re}(\kappa_{\text{eff}}) \omega^3 R^3$  должно быть достаточно малым,  $\omega^3 R^3 c_m^{-3} \ll 1$ . Последнее условие также



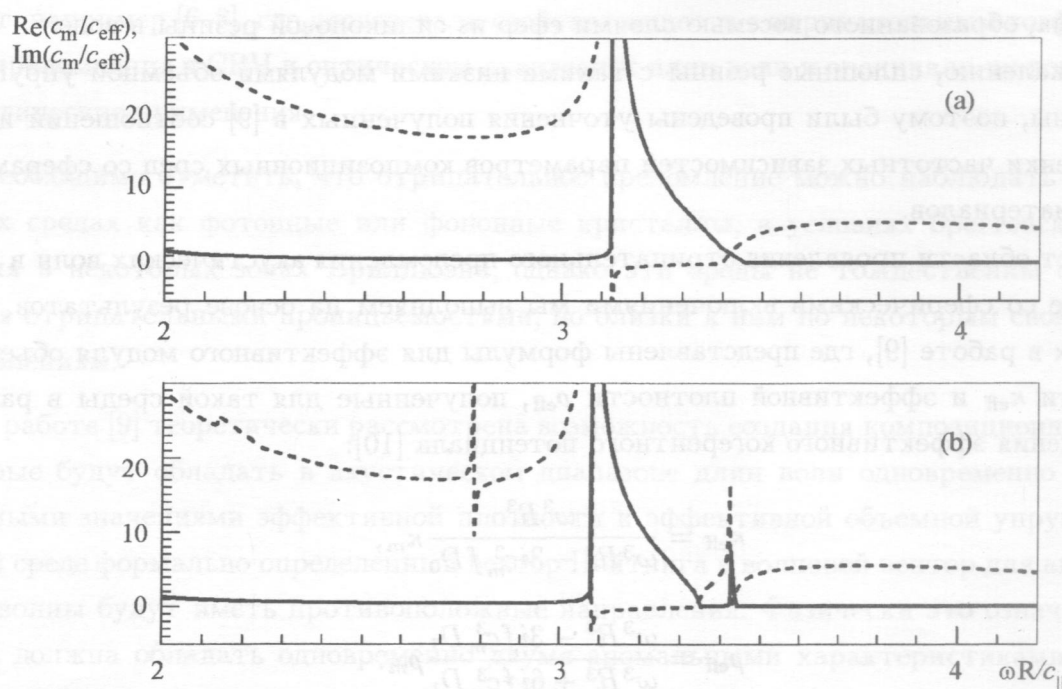


Рис. 1. Первое низкочастотное окно прозрачности, отвечающее полосе частот двойной (одновременной) отрицательности эффективных величин  $\kappa_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$ , для жидкой среды с резонансными включениями в виде **сплошных шаров** с низкой скоростью продольной звуковой волны:  $c_{\parallel}/c_m = 0.017$ ,  $f = 0.1$ ,  $\rho_i/\rho_m = 1.3$ . Сплошные и разрывные линии здесь – частотные зависимости действительной и мнимой частей отношения  $c_m/c_{\text{eff}}$ , соответственно; (a) –  $c_{\perp}/c_{\parallel} \rightarrow 0$ ; (b) –  $c_{\perp}/c_{\parallel} = 0.2$ . В случае водной среды ( $c_m = 1500$  м/с;  $\rho_m = 1$  г/см<sup>3</sup>) рассчитанный пример соответствует шарам из резины с характеристиками, приведенными в [11] ( $c_{\parallel} = 25$  м/с;  $c_{\perp} = 5$  м/с).

необходимо для выполнения условия применимости приближения эффективной однородной среды,  $\omega R c_m^{-1} f^{-1/3} \ll 1$ . Указанные требования выполняются, если характерные величины скоростей звука внутри включения  $s$ , определяющие соответствующие резонансные частоты, значительно (в десятки и до сотни раз) ниже скорости звука в окружающей жидкости,

$$s \ll c_m. \quad (3)$$

Здесь можно предложить, например, использовать включения в виде шаров из микропористой резины, для которой величина  $s_i$  достигает величины порядка 25 м/с. Результаты расчета частотного окна прозрачности, отвечающего отрицательному преломлению (двойной отрицательности эффективных величин  $\kappa_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$ ) для таких шаровых

включений в воде, приведены на рис. 1. В частотном окне прозрачности затухание (величина  $\text{Im}(c_{\text{eff}}^{-1}) = \text{Im}(\sqrt{\rho_{\text{eff}}/\kappa_{\text{eff}}})$ ), связанное с излучением, имеет относительно малые значения, и рассчитанный вариант представляется привлекательным, однако микропористая резина может иметь достаточно сильное собственное вязкое затухание, которое может значительно ухудшить перспективы практической реализации данного варианта частотного окна двойной отрицательности. Учет вязкого затухания составит предмет дальнейших исследований.

Другой возможный вариант резонансов, соответствующих малым скоростям распространения звука во включениях – использование полых шаров. Для полых шаров резонансные частоты определяются главным образом сдвиговыми напряжениями и, следовательно, скоростью поперечного звука  $c_{\perp}$ , которая для сред типа монолитной резины почти на два порядка меньше скорости продольного звука  $c_{\parallel}$  ( $c_{\parallel} \sim 10^3$  м/с;  $c_{\perp} \sim 30 - 80$  м/с).

Для расчета коэффициентов рассеяния  $D_0$  и  $D_1$  рассмотрим падение плоской звуковой волны из бесконечности на помещенный в окружающую жидкость шар с внешним радиусом  $R$  и концентрической сферической полостью радиуса  $a$ . Введем сферическую систему координат с началом отсчета в центре шара и с осью, направление которой совпадает с направлением распространения падающей плоской волны. В жидкости вектор смещения  $\mathbf{u}_m$  можно записать в виде  $\mathbf{u}_m = \vec{\nabla}\Phi_m$ , где потенциал  $\Phi_m$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Phi_m + \frac{\omega^2}{c_m^2}\Phi_m = 0. \quad (4)$$

Внутри шара вектор смещения  $\mathbf{u}$  представим в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей [12]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}, \quad (5)$$

удовлетворяющих волновым уравнениям

$$\Delta\mathbf{u}_{\parallel} + \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2}\mathbf{u}_{\parallel} = 0, \quad \Delta\mathbf{u}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c_{\perp}^2}\mathbf{u}_{\perp} = 0.$$

Потенциальная составляющая здесь также представляется в виде  $\mathbf{u}_{\parallel} = \vec{\nabla}\Phi_{\parallel}$ , где

$$\Delta\Phi_{\parallel} + \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2}\Phi_{\parallel} = 0. \quad (6)$$

В рамках задачи определения коэффициентов  $D_0$  и  $D_1$  обе составляющие смещения  $\mathbf{u}_{\parallel}$  и  $\mathbf{u}_{\perp}$  зависят только от двух сферических координат  $r, \theta$  – радиуса и широтного угла.

В этом случае и соленоидальную  $\mathbf{u}_\perp$  составляющую смещения можно выразить через одну скалярную функцию  $\Psi_\perp$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца,

$$\mathbf{u}_\perp = [\vec{\nabla} \times [\mathbf{r}\mathbf{e}_r \times \vec{\nabla}\Psi_\perp]], \quad (7)$$

$$\Delta\Psi_\perp + \frac{\omega^2}{c_\perp^2}\Psi_\perp = 0, \quad (8)$$

где квадратными скобками обозначены векторные произведения, а  $\mathbf{e}_r$  – единичный вектор в радиальном направлении.

Граничные условия здесь формулируются следующим образом. На внешней поверхности шара при  $r = R$  непрерывны две компоненты тензора напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta r}$ , а также радиальная компонента вектора смещения  $u_r$ ; а на границе с полостью при  $r = a$  – равны нулю обе компоненты тензора напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta r}$ . Последние условия означают, что мы рассматриваем здесь приближение пустой внутренней полости. Имея в виду расчет коэффициентов рассеяния  $D_0$  и  $D_1$ , решения уравнений Гельмгольца (4), (6), (8) ищем в виде  $\Phi_m = M_n(r)P_n(\cos\theta)$ ,  $\Phi_\parallel = F_n(r)P_n(\cos\theta)$ ,  $\Psi_\perp = G_n(r)P_n(\cos\theta)$ , где  $n = 0, 1$  и  $P_n(\cos\theta)$  – соответствующие полиномы Лежандра. Тогда с учетом разложения падающей плоской волны по сферическим гармоникам получаем:

$$M_0(r) = \frac{\sin(\omega c_m^{-1}r)}{\omega c_m^{-1}r} + D_0 \frac{\exp(i\omega c_m^{-1}r)}{i\omega c_m^{-1}r},$$

$$F_0(r) = A_{\parallel,0} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r} + B_{\parallel,0} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r}, \quad (9)$$

$$G_0(r) = A_{\perp,0} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r} + B_{\perp,0} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r}$$

– для монопольного рассеяния, и

$$M_1(r) = 3i \frac{\sin(\omega c_m^{-1}r) - \omega c_m^{-1}r \cos(\omega c_m^{-1}r)}{\omega^2 c_m^{-2} r^2} + 3D_1 \frac{(1 - i\omega c_m^{-1}r) \exp(i\omega c_m^{-1}r)}{\omega^2 c_m^{-2} r^2},$$

$$F_1(r) = A_{\parallel,1} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r) - \omega c_\parallel^{-1}r \cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega^2 c_\parallel^{-2} r^2} + B_{\parallel,1} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r) + \omega c_\parallel^{-1}r \sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega^2 c_\parallel^{-2} r^2}, \quad (10)$$

$$G_1(r) = A_{\perp,1} \frac{\sin(\omega c_\perp^{-1}r) - \omega c_\perp^{-1}r \cos(\omega c_\perp^{-1}r)}{\omega^2 c_\perp^{-2} r^2} + B_{\perp,1} \frac{\cos(\omega c_\perp^{-1}r) + \omega c_\perp^{-1}r \sin(\omega c_\perp^{-1}r)}{\omega^2 c_\perp^{-2} r^2}$$

– для дипольного. Внутри шара соответствующие мультипольные составляющие ( $n = 0, 1$ ) для компонент тензора напряжения и вектора смещения, входящих в граничные

В этом случае и соленоидальную  $\mathbf{u}_\perp$  составляющую смещения можно выразить через одну скалярную функцию  $\Psi_\perp$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца,

$$\mathbf{u}_\perp = [\vec{\nabla} \times [r\mathbf{e}_r \times \vec{\nabla}\Psi_\perp]], \quad (7)$$

$$\Delta\Psi_\perp + \frac{\omega^2}{c_\perp^2}\Psi_\perp = 0, \quad (8)$$

где квадратными скобками обозначены векторные произведения, а  $\mathbf{e}_r$  – единичный вектор в радиальном направлении.

Граничные условия здесь формулируются следующим образом. На внешней поверхности шара при  $r = R$  непрерывны две компоненты тензора напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta r}$ , а также радиальная компонента вектора смещения  $u_r$ ; а на границе с полостью при  $r = a$  – равны нулю обе компоненты тензора напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta r}$ . Последние условия означают, что мы рассматриваем здесь приближение пустой внутренней полости. Имея в виду расчет коэффициентов рассеяния  $D_0$  и  $D_1$ , решения уравнений Гельмгольца (4), (6), (8) ищем в виде  $\Phi_m = M_n(r)P_n(\cos\theta)$ ,  $\Phi_\parallel = F_n(r)P_n(\cos\theta)$ ,  $\Psi_\perp = G_n(r)P_n(\cos\theta)$ , где  $n = 0, 1$  и  $P_n(\cos\theta)$  – соответствующие полиномы Лежандра. Тогда с учетом разложения падающей плоской волны по сферическим гармоникам получаем:

$$M_0(r) = \frac{\sin(\omega c_m^{-1}r)}{\omega c_m^{-1}r} + D_0 \frac{\exp(i\omega c_m^{-1}r)}{i\omega c_m^{-1}r},$$

$$F_0(r) = A_{\parallel,0} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r} + B_{\parallel,0} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r}, \quad (9)$$

$$G_0(r) = A_{\perp,0} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r} + B_{\perp,0} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega c_\parallel^{-1}r}$$

– для монопольного рассеяния, и

$$M_1(r) = 3i \frac{\sin(\omega c_m^{-1}r) - \omega c_m^{-1}r \cos(\omega c_m^{-1}r)}{\omega^2 c_m^{-2} r^2} + 3D_1 \frac{(1 - i\omega c_m^{-1}r) \exp(i\omega c_m^{-1}r)}{\omega^2 c_m^{-2} r^2},$$

$$F_1(r) = A_{\parallel,1} \frac{\sin(\omega c_\parallel^{-1}r) - \omega c_\parallel^{-1}r \cos(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega^2 c_\parallel^{-2} r^2} + B_{\parallel,1} \frac{\cos(\omega c_\parallel^{-1}r) + \omega c_\parallel^{-1}r \sin(\omega c_\parallel^{-1}r)}{\omega^2 c_\parallel^{-2} r^2}, \quad (10)$$

$$G_1(r) = A_{\perp,1} \frac{\sin(\omega c_\perp^{-1}r) - \omega c_\perp^{-1}r \cos(\omega c_\perp^{-1}r)}{\omega^2 c_\perp^{-2} r^2} + B_{\perp,1} \frac{\cos(\omega c_\perp^{-1}r) + \omega c_\perp^{-1}r \sin(\omega c_\perp^{-1}r)}{\omega^2 c_\perp^{-2} r^2}$$

– для дипольного. Внутри шара соответствующие мультипольные составляющие ( $n = 0, 1$ ) для компонент тензора напряжения и вектора смещения, входящих в граничные



условия на поверхностях шара, с учетом уравнений Гельмольца (6), (8) можно записать в виде (компоненты тензора деформации в сферических координатах можно найти, например, в [4]):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,n} &= -\rho_i \left\{ \left[ 4r^{-1} \frac{dF_n}{dr} + 2n(n+1) \left( r^{-1} \frac{dG_n}{dr} - \frac{F_n + G_n}{r^2} \right) \right] c_1^2 + \omega^2 F_n \right\} P_n(\cos\theta), \\ \sigma_{\theta r,n} &= \rho_i \left\{ 2 \left[ r^{-1} \left( \frac{dF_n}{dr} + \frac{dG_n}{dr} \right) - \frac{F_n + (n^2 + n - 1)G_n}{r^2} \right] c_1^2 + \omega^2 G_n \right\} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \\ u_{r,n} &= \left\{ \frac{dF_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r} G_n \right\} P_n(\cos\theta),\end{aligned}\quad (11)$$

где  $\rho_i$  – плотность материала шара. Аналогичные величины для окружающей шар жидкости имеют вид:

$$\sigma_{rr,n} = -\rho_m \omega^2 M_n P_n(\cos\theta), \quad \sigma_{\theta r,n} = 0, \quad u_{r,n} = \frac{dM_n}{dr} P_n(\cos\theta). \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) при  $n = 0$  и  $n = 1$  с учетом (9) и (10) в сформулированные выше граничные условия на поверхностях шара, можно получить явные выражения для искоемых коэффициентов рассеяния  $D_0$  и  $D_1$ . Затем с помощью (1), (2) определяем эффективный модуль объемной упругости  $\kappa_{\text{eff}}$  и эффективную плотность  $\rho_{\text{eff}}$  сложной среды – жидкости с включениями в виде полых шаров.

Результаты расчетов представлены на рис. 2. Здесь показаны зависимости действительной и мнимой частей величины, обратной эффективной скорости распространения волны в жидкой среде с включениями,  $c_m/c_{\text{eff}} = \sqrt{\kappa_m \rho_{\text{eff}} / \kappa_{\text{eff}} \rho_m}$ . Значение  $c_m \text{Re}c_{\text{eff}}^{-1} = \lambda_m / \lambda_{\text{eff}}$  при этом характеризует уменьшение эффективной длины волны по сравнению со средой без включений, а значение  $c_m \text{Im}c_{\text{eff}}^{-1}$  – затухание волны на длине, равной  $\lambda_m / 2\pi$ . Отношения мнимой и действительной частей характеризуют здесь эффективную добротность волны (затухание на длине, равной  $\lambda_{\text{eff}} / 2\pi$ ), то есть процесс распространения волны имеет смысл только если это отношение много меньше единицы. Такое неравенство может выполняться только если действительные части эффективных величин  $\kappa_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$  имеют одинаковые знаки, это реализуется, в том числе, в частотной полосе (окне) двойной отрицательности этих величин. Отметим, что в окне двойной отрицательности величина  $c_m \text{Im}c_{\text{eff}}^{-1}$  также отрицательна – это соответствует тому, что направление распространения энергии здесь противоположно направлению волнового вектора.



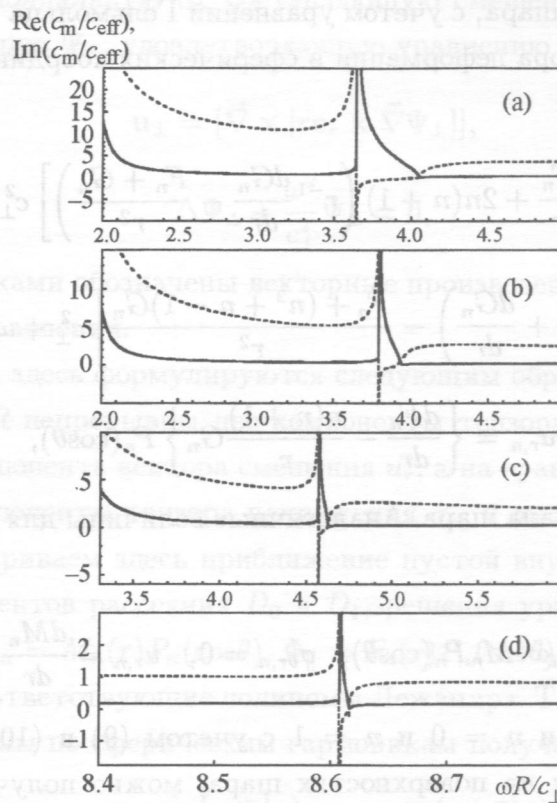


Рис. 2. Окно прозрачности, отвечающее полосе частот двойной отрицательности  $\kappa_{\text{eff}}$  и  $\rho_{\text{eff}}$ , для жидкой среды (воды) с резонансными включениями в виде **полых** шаров из обычной монолитной резины (скорость продольной звуковой волны сравнима со скоростью звука в воде):  $c_{\parallel}/c_m = 0.7$ ;  $\rho_i/\rho_m = 1.3$ ;  $c_{\perp}/c_{\parallel} = 0.05$ . Сплошные и разрывные линии – частотные зависимости действительной и мнимой частей отношения  $c_m/c_{\text{eff}}$ , соответственно. Показаны изменения первого низкочастотного окна двойной отрицательности при изменении относительного радиуса полости  $a/R$  и коэффициента  $f$  заполнения среды включениями: (a) –  $a/R = 0.8$ ,  $f = 0.3$ ; (b) –  $a/R = 0.8$ ,  $f = 0.1$ ; (c) –  $a/R = 0.6$ ,  $f = 0.1$ ; (d) –  $a/R = 0.33$ ,  $f = 0.1$ .

Результаты расчетов (рис. 2) показывают, что жидкая среда (вода) с включениями в виде полых резиновых шаров имеет ярко выраженные окна прозрачности, соответствующие двойной отрицательности эффективной упругости и эффективной плотности составной среды. Ширина первого низкочастотного окна при этом достаточна для экспериментальной реализации эффекта даже при небольших значениях коэффициента заполнения  $f \sim 0.1$ . При этом внутри окна имеется интервал частот, в котором выполняется условие эффективного распространения  $\text{Im}c_{\text{eff}}^{-1}/\text{Re}c_{\text{eff}}^{-1} \ll 1$ . Следует отметить, что

полученные результаты справедливы при условии малости вязких потерь. Это условие, по-видимому, должно выполняться при достаточном увеличении линейного масштаба системы (увеличении радиуса шаров и длины волны). Приведенные на рис. 2 результаты показывают, что ширина окна прозрачности, как и ширина интервала эффективного распространения, возрастают с ростом относительного размера полости; при этом окно сдвигается в низкочастотную область. Предельный случай тонкой оболочки требует, однако, дополнительного анализа с учетом упругости газа внутри полости.

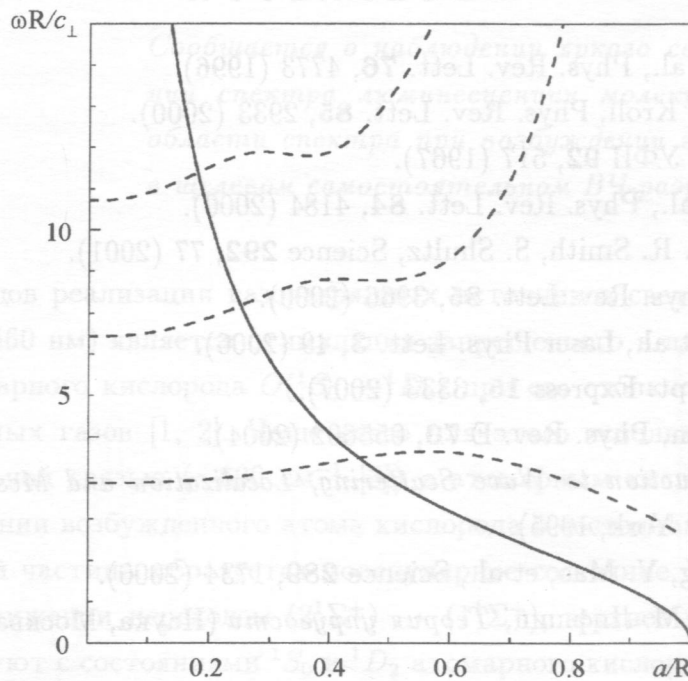


Рис. 3. Частоты первого монопольного (сплошная линия) и дипольных (разрывные линии) резонансов полых шаров в зависимости от относительного радиуса полости  $a/R$ .

При изменении параметров материала полых шаров и окружающей жидкости для предварительного расчета положения окон двойной отрицательности можно воспользоваться представленными на рис. 3 зависимостями нормированных резонансных частот от относительного радиуса полости. Эти зависимости получены в приближении  $c_{\perp} \ll c_{\parallel}, c_m$ , то есть, согласно (3), при условии, наиболее благоприятном для таких окон. Для выполнения условия двойной отрицательности частота волны должна одновременно попасть в области резонансов монопольного и дипольного типа. При этом величина  $\text{Re}(\kappa_{\text{eff}})$  становится отрицательной в высокочастотной “половине” широкой области монопольного резонанса ( $\omega > \omega_{\text{рез},n=0}$ ). Таким образом, положение окон двойной

отрицательности на рис. 3 соответствует частотам дипольных резонансов (разрывные линии), расположенным выше сплошной линии (кривая первого монополярного резонанса). При этом самое высокочастотное первое низкочастотное окно локализовано вблизи части нижней штриховой линии на рис. 3, расположенной выше сплошной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 06-02-16830 и 06-02-16926.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. B. Pendry et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [2] D. R. Smith, N. Kroll, Phys. Rev. Lett. **85**, 2933 (2000).
- [3] В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).
- [4] D. R. Smith et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).
- [5] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Shultz, Science **292**, 77 (2001).
- [6] J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000).
- [7] V. P. Drachev et al., Laser Phys. Lett. **3**, 49 (2006).
- [8] W. Cai et al., Opt. Express **15**, 3333 (2007).
- [9] J. Li, C. T. Chan, Phys. Rev. E **70**, 055602 (2004).
- [10] P. Shen, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena* (Academic, New York, 1995).
- [11] Z. Lui, X. Zhang, Y. Mao, et al., Science **289**, 1734 (2000).
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости* (Наука, Москва, 1987).

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 21 декабря 2007 г.