УДК 533.9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ АКСИАЛЬНО-НЕССИМЕТРИЧНЫХ МОД В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ В ОБЛАСТИ ГЕЛИКОНОВЫХ ЧАСТОТ

Ю. М. Алиев

Рассмотрено влияние радиального градиента плотности плазмы на косое распространение волн в области геликоновых частот. Показано, что в сильно неоднородной геликоновой плазме дисперсионные свойства электростатических и электромагнитных мод существенно изменяются. В частности, продемонстрирован переход между скейлингами $\omega \sim k_z$ и $\omega \sim k_z^2$ геликоновых собственных частот. Проанализирован процесс полной конверсии длинноволновой геликоновой моды в коротковолновую электростатическую волну в приосевой области плазменного цилиндра. Благодаря модификации дисперсионных соотношений плотность плазмы, при которой происходит трансформация мод, существенно понижается при условии, что градиент плотности достаточно большой. Приведены оценки для бесстолкновительного аксиального декремента затухания геликоновой моды, связанного с линейной трансформацией мод, который сопоставляется с обычным столкновительным декрементом.

Традиционная теория трансформации волн в неоднородной магнитоактивной плазме [1] не учитывает влияние градиента электронной плотности на распространение волн и применима только для аксиально-симметричных мод, либо для достаточно гладких распределений плотности в случае косого распространения волн. Однако в последнем случае плотность плазмы, необходимая для реализации конверсии волн во внутренних областях плазмы, является довольно высокой. В настоящей работе изучается трансформация аксиально-несимметричных мод ($m \neq 0$) с учетом влияния градиента плотности на распространение волн. Показано, что плотность плазмы, при которой происходит трансформация волн, может быть существенно снижена, если градиент плотности достаточно большой.

Для простоты мы рассматриваем задачу в плоской геометрии. Представляя электромагнитные поля в виде

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\} = \{\mathbf{E}(x), \mathbf{B}(x)\} \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{1}$$

получаем из уравнений Максвелла для компонент E_z и B_z

$$\begin{gathered}
\Delta_\perp E_z + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}(\varepsilon_\perp - N_z^2)E_z - \frac{N_z^2}{\varepsilon_\perp}\left(L_1^{-1}\frac{\partial E_z}{\partial x} + k_y L_2^{-1} E_z\right) = \\
= i\frac{N_z}{\varepsilon_\perp}\left(\frac{\omega^2}{c^2} g B_z + k_y L_1^{-1} B_z + L_2^{-1}\frac{\partial B_z}{\partial z}\right), \\
\Delta_\perp B_z + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{\varepsilon_\perp} - N_z^2\right)B_z - \frac{1}{\varepsilon_\perp}\left[(gL_2^{-1} + \varepsilon_\perp L_1^{-1})\frac{\partial B_Z}{\partial x} + k_y(gL_1^{-1} + \varepsilon_\perp L_2^{-1})B_z\right] = \\
= -i\frac{N_z}{\varepsilon_\perp}\left[\frac{\omega^2}{c^2} g\varepsilon_\parallel E_z + (\varepsilon_\perp L_2^{-1} + gL_1^{-1})\frac{\partial E_z}{\partial x} + k_y(\varepsilon_\perp L_1^{-1} + gL_2^{-1})E_z\right],
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{\partial}{\partial x^2} - k_y^2,\ L_1^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{|(\varepsilon_\perp - N_z^2)^2 - g^2|},\ L_2^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_\perp - N_z^2 - g}{\varepsilon_\perp - N_z^2 + g}\right|}, N_z = \frac{ck_z}{\omega} \tag{3}$$

$\varepsilon_\perp \equiv \varepsilon_{xx}, \varepsilon_\parallel \equiv \varepsilon_{zz}, g \equiv -i\varepsilon_{xy}$ – элементы тензора восприимчивости. Для условий геликоновой плазмы, $\varepsilon_\parallel \gg g \gg N_z^2 \gg \varepsilon_\perp$, получаем

$$L_1^{-1} \approx L_N^{-1} \equiv \frac{\partial \ln g}{\partial x},\ L_2^{-1} = -\frac{N_z^2}{g} L_N^{-1}. \tag{4}$$

В этих условиях система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{gathered}
\Delta_\perp E_z + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}(\varepsilon_\perp - N_z^2)E_z - \frac{N_z^2}{\varepsilon_\perp} L_N^{-1}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{N_z^2}{g} k_y E_z\right) = \\
= i\frac{N_z}{\varepsilon_\perp}\left[\frac{\omega^2}{c^2} g B_z + L_N^{-1}\left(k_y B_z - \frac{N_z^2}{g}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\right],
\end{gathered}$$

$$\Delta_\perp B_z + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{\varepsilon_\perp} - N_z^2\right)B_z - \frac{g}{\varepsilon_\perp}L_N^{-1}\left(k_y B_z - \frac{N_z^2}{g}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \tag{5}$$

$$= -i\frac{N_z}{\varepsilon_\perp}\left[\frac{\omega^2}{c^2}g\varepsilon_\| E_z + gL_N^{-1}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{N_z^2}{g}k_y E_z\right)\right].$$

Предполагая, что $\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\| E_z \gg L_N^{-1}\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $k_y B_z \gg \frac{N_z^2}{g}\frac{\partial B_z}{\partial x}$, $k_y E_z \gg \frac{N_z^2}{g}\frac{\partial E_z}{\partial x}$, получаем

$$\Delta_\perp E_z + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\|}{\varepsilon_\perp}(\varepsilon_\perp - N_z^2)E_z = i\frac{N_z}{\varepsilon_\perp}\left(\frac{\omega^2}{c^2}g + L_N^{-1}k_y\right)B_z,$$

$$\Delta_\perp B_z + \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{\varepsilon_\perp} - N_z^2\right) - \frac{k_y g}{\varepsilon_\perp}L_N^{-1}\right]B_z = -i\frac{N_z g}{\varepsilon_\perp}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\| E_z. \tag{6}$$

Представляем решения системы уравнений (6) в первом приближении геометрической оптики [1] в виде

$$\{E_z(x), B_z(x)\} \propto \exp\left(i\int^x dx k_z(x)\right). \tag{7}$$

Из (6), с учетом (7), получаем дисперсионное соотношение для поперечного волнового числа $k_\perp^2 \equiv k_x^2(x) + k_y^2$ в виде биквадратного уравнения

$$k_\perp^4 - \alpha k_\perp^2 - \beta = 0, \tag{8}$$

где

$$\alpha = -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\|}{\varepsilon_\perp}N_z^2 + \frac{g}{\varepsilon_\perp}k_y L_N^{-1}\right),\ \beta = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\|}{\varepsilon_\perp}g\left(k_y L_N^{-1} + \frac{\omega^2}{c^2}g\right). \tag{9}$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$k_{\perp 1,2}^2 = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{D}) \tag{10}$$

с дискриминантом

$$D(x) = \alpha^2(x) + 4\beta(x). \tag{11}$$

Для геликоновой области частот $|\omega_{ce}| \gg \omega \gg \sqrt{|\omega_{ce}|\omega_{ci}}$ ($\omega_{ci,ce} = \pm eB_0/m_{i,e}c$: ионная и электронная циклотронные частоты) существенна только динамика электронов. В предположении, что плазма плотная ($\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$: электронная плазменная частота, $\varepsilon_\| \approx -\omega_{pe}^2/\omega^2$, $\varepsilon_\perp \approx \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2$, $g \approx \omega_{pe}^2/(\omega\omega_{ce})$), коэффициенты α и β принимают форму

$$\alpha = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega}\left(k_z^2\frac{|\omega_{ce}|}{\omega} + k_y L_N^{-1}\right),\ \beta = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2}\left(\frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - \frac{|\omega_{ce}|}{\omega}k_y L_N^{-1}\right). \tag{12}$$

Рассмотрим сначала область плазмы, где $\alpha^2(x) \gg 4|\beta(x)|$. В этих условиях получаем из (8)–(10) для коротковолновых электростатических мод (волн Тривелписа–Гулда)

$$k_{\perp 1}^2 \approx \alpha \text{ или } k_x^2(x) \approx \frac{|\omega_{\text{ce}}|}{\omega}\left(k_z^2 \frac{|\omega_{\text{ce}}|}{\omega} + k_y L_N^{-1}\right) - k_y^2. \tag{13}$$

Из (13) следует, что градиентный член дает возможность захвата этих мод между двумя точками поворота $k_x^2(x_{1,2}) = 0$. Влияние градиента плотности плазмы на локализацию квазипотенциальных мод (13) было исследовано для различных профилей плотности в [2]. Соотвественно, для длинноволновых электромагнитных волн (геликоновых мод) имеем

$$k_{\perp 2}^2 \approx -\frac{\beta}{\alpha} \text{ или } k_x^2(x) \approx \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2}\frac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|}\frac{\dfrac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2}\dfrac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|} - k_y L_N^{-1}}{k_z^2 + k_y L_N^{-1}\dfrac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|}} - k_y^2. \tag{14}$$

Заметим, что знаменатель в (14) не должен быть слишком малым так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha^2(x) \gg 4|\beta(x)|$. Последнее имеет место для слабонеоднородной плазмы, где $L_N^{-1} \ll k_z^2|k_y^{-1}\omega_{\text{ce}}|/\omega$. В этом случае градиентным членом в знаменателе (14) можно пренебречь и получить

$$k_x^2(x) = \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2 k_z^2}\frac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|}\left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2}\frac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|} - k_y L_N^{-1}\right) - k_y^2. \tag{15}$$

Соотношение (15) может быть также получено из соответствующего дифференциального уравнения [3], которое следует из полной системы уравнений Максвелла в предположении равенства нулю аксиальной компоненты электрического поля, что предполагает пренебрежение связью геликоновых волн с электростатическими модами. Для слабого градиента плотности $\dfrac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2}\dfrac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|} \gg |k_y L_N^{-1}|$ получаем из (15) известное локальное дисперсионное соотношение

$$\omega = |\omega_{\text{ce}}|\frac{c^2 k_z k_\perp}{\omega_{\text{pe}}^2}, \tag{16}$$

в то время как в противоположном случае сильного градиента

$$\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{c^2}\frac{\omega}{|\omega_{\text{ce}}|} \ll |k_y L_N^{-1}|, \tag{17}$$

имеем

$$\omega = -|\omega_{\text{ce}}|\frac{c^2 k_z^2 k_\perp^2}{\omega_{\text{pe}}^2 k_y L_N^{-1}}. \tag{18}$$

Из (18) видно, что моды с $k_y L_N^{-1} > 0$ (моды с $m < 0$ для случая цилиндрической геометрии) не могут распространяться. Дисперсионные соотношения (16) и (18) имеют различный, соответственно линейный и квадратичный, скейлинг по аксиальному волновому числу k_z. Отметим, что подобно случаю распространения электростатических волн [2], градиентный член в (15) может приводить к возникновению новых зон прозрачности, формируя волновод для геликоновых мод [4]. Наинизшая волноводная мода, распространяющаяся вдоль тонкого переходного слоя между двумя плазмами с плотностями n_{e1} и n_{e2}, названная в [3] поверхностной волной, подчиняется дисперсионному уравнению

$$\omega = -|\omega_{\rm ce}|\frac{2|k_y|c^2k_z^2}{k_y(\omega_{\rm pe2}^2 - \omega_{\rm pe1}^2)}. \tag{19}$$

Отметим, что соотношение (19) также имеет квадратичную зависимость частоты от аксиального волнового вектора, поскольку в этом случае неравенство (17) также выполнено и градиентный член является определяющим для дисперсии этой моды.

Теперь обсудим вопрос конверсии геликона в электростатическую моду. Если знаменатель в (14) становится малым, $k_x(x)$ растет и это уравнение становится неприменимым. В результате происходит сближение ветвей (10) и происходит трансформация мод. В точке x_0, где $D(x_0) = 0$, обе моды имеют одинаковое волновое число k_{x0}^2,

$$k_{x0}^2 = \frac{\alpha(x_0)}{2} - k_y^2 = \sqrt{\beta(x_0)\mathrm{sign}[\alpha(x_0)]} - k_y^2. \tag{20}$$

Из соотношения $D(x_0) = 0$ находим плотность плазмы в этой точке

$$\frac{4\omega^2}{c^2k_z^2}\frac{\omega_{\rm pe}^2(x_0)}{\omega_{\rm ce}^2} = \left[1 + \frac{\omega k_y}{|\omega_{\rm ce}|k_z^2}L_N^{-1}(x_0)\right]^2. \tag{21}$$

Учитывая ранее принятое условие $N_z^2 \gg \varepsilon_\perp$, из (21) получаем, что градиент плотности в области трансформации мод определяется соотношением

$$L_N(x_0) \approx -\frac{\omega k_y}{|\omega_{\rm ce}|k_z^2}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что трансформация происходит только для мод, распространяющихся в азимутальном направлении, определяемым условием $-k_y L_N^{-1} \geq 0$. Используя (12) и (22), из (20) получаем

$$k_x^2(x_0) \approx |k_z|\frac{\omega_{\rm pe}(x_0)}{c}\frac{|\omega_{\rm ce}|}{\omega}\mathrm{sign}[\alpha(x_0)], \tag{23}$$

где для плотной плазмы принято условие $k_x^2(x_0) \gg k_y^2$. Из (22) следует, что трансформация мод происходит в области плазмы, где $\alpha(x_0) \geq 0$. Отметим, что соотношение (22) не зависит от плотности и справедливо в широком диапазоне плотностей плазмы

$$\varepsilon_\perp \approx \omega_{\rm pe}^2(x_0)/\omega_{\rm ce}^2 \ll N_z^2. \tag{24}$$

Для слабонеоднородной плазмы, в которой выполнено условие $k_z^2|\omega_{\rm ce}|/\omega \gg k_y L_N^{-1}$, из (21) следует результат теории, пренебрегающей эффектами градиента плотности и предсказывающей трансформацию волн в точке x_0, где локальная плотность плазмы значительно превосходит значение, даваемое условием (24), и определяется соотношением [5]

$$\varepsilon_\perp \approx \omega_{\rm pe}^2(x_0)/\omega_{\rm ce}^2 = \frac{1}{4}N_z^2. \tag{25}$$

Таким образом, трансформация геликоновой моды в электростатическую может происходить в центральной области плазменного столба при условии , что там имеется достаточно крутой градиент плотности. Можно качественно объяснить роль градиента плотности в предлагаемой теории. Здесь сближение длин волн происходит преимущественно благодаря увеличению длины волны электростатической моды в области пространства, где выполнено условие (22). В пренебрежении эффектами градиента плотности дисперсия электростатической моды не зависит от плотности плазмы и процесс слияния мод происходит за счет укорачивания длины волны геликона в результате роста плотности плазмы. Это является причиной того, почему в прежних теориях трансформация волн происходит в области достаточно высокой плотности плазмы (25).

Важным моментом в теории трансформации волн является определение эффективности трансформации. Геометрико-оптические решения, предствленные выше, не справедливы в окрестности точки ветвления x_0, где происходит трансформация мод. Согласно общепринятой теории, поля в этой области описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка. Следуя хорошо известному подходу (см. Приложение), можно получить формулы связи для трансформации мод, из которых следует полная трансформация геликона в сильно затухающую электростатическую моду. Оценим влияние трансформации волн на аксиальный декремент затухания геликоновой моды $\kappa = {\rm Im}k_z$. Скорость утечки энергии геликона, связанной с трансформацией в энергию электростатической моды, оценивается, как $\gamma = V_{\rm gr,x}/R$, где $\mathbf{V}_{\rm gr} = \dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$ – групповая скорость геликона , R – поперечный размер геликонового волновода. Таким образом, получаем выражение для аксиального декремента затухания

$$\kappa = \gamma/V_{\rm gr,z} = R^{-1}V_{\rm gr,x}/V_{\rm gr,z}. \tag{26}$$

Используя соотношение (18), находим $\kappa = (k_x R)^{-1} k_z$. Полученное выражение для коэффициета бесстолкновительного затухания κ может оказаться сравнимым с аксиальным декрементом затухания, связанным с электронными столкновениями $\kappa_{\text{coll}} = \dfrac{\nu_e}{\omega_{ce}} k_x$ при условии, что электронная частота столкновений не слишком велика.

Приложение.

Система уравнений (6) при условии $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \gg k_y^2$ имеет вид

$$\frac{\partial^4 B_z}{\partial x^4} + \alpha(x)\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \beta(x) B_z = 0, \tag{A1}$$

где коэффициенты $\alpha(x)$, $\beta(x)$ (12) медленно меняются на расстоянии порядка локальной длины волны. Имеется много способов исследования этого уравнения для процесса конверсии мод. Обзор этих методов с многими ссылками можно найти в [6, 7]. Ниже мы следуем наиболее простому и прозрачному методу [6], дающему информацию о поведении решений в окрестности точки трансформации мод x_0. Поля в этой области могут быть представлены в виде

$$B_z(x) = u(x) \exp\left(i \int\limits_{x_0}^{x} dx' \sqrt{\frac{\alpha(x')}{2}} \right), \tag{A2}$$

где экспоненциальный член описывает регулярную часть решения, а медленноменяющаяся функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{D(x)}{8\alpha(x)} u(x) = 0. \tag{A3}$$

Для получения (A3) было пренебрежено третьей и четвертой производными от функции $u(x)$. Вблизи точки x_0 можно записать $D(x) = (x - x_0) \left.\dfrac{\partial D(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ и представить решение (A3) через функции Эйри Ai $\left\{ -\left[\dfrac{D'(x_0)}{8\alpha(x_0)}\right]^{1/3} (x - x_0) \right\}$ и Bi $\left\{ -\left[\dfrac{D'(x_0)}{8\alpha(x_0)}\right]^{1/3} (x - x_0) \right\}$. Экспоненциально растущие решения Bi исключаются из рассмотрения и используются только функции Ai с асимптотическими разложениями

$$\mathrm{Ai}(\xi) \approx \frac{\xi^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2} \right), \ \xi > 0,$$

$$\mathrm{Ai}(\xi) \approx \frac{e^{-i\pi/4}|\xi|^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(i\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} \right) + i \exp\left(-i\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} \right) \right], \ \xi < 0. \tag{A4}$$

Сопоставляя (A4) с геометрико-оптическими решениями

$$B_z(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{k(x)[k_1^2(x) - k_2^2(x)]}} \exp\left(i \int^x dx' k(x') \right) \tag{A5}$$

в предположении $D'(x_0) > 0$, получаем следующие формулы связи

$$\begin{pmatrix} b_1^+ - ib_2^+ \\ b_1^- + ib_2^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1^+ \\ ib_2^- \end{pmatrix}, \tag{A6}$$

где $b_i^{\pm}$ представляют собой решения (A5) для $\pm k_i(x)$. Из (A6) следует, что две волны $b_{1,2}^+$ (или $b_{1,2}^-$), имеющие одинаковое направление фазовых скоростей, трансформируются в точке x_0 так, что происходит 100% конверсия волны одного типа в волну другого типа. Для этого вида трансформации области прозрачности для обеих волн расположены по одну сторону от точки x_0. Отсюда следует, что групповые скорости мод должны быть антипараллельны, что имеет место для прямой геликоновой волны и обратной электростатической моды.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме* (ФМ, Москва, 1960).

[2] Ю. М. Алиев, М. Крамер, Краткие сообщения по физике ФИАН, No. 8, 37 (2005).

[3] А. Н. Кондратенко, *Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме* (Энергоатомиздат, Москва, 1985).

[4] Е. З. Гусаков, М. А. Ирзак, А. Д. Пилия, Письма в ЖЭТФ **65**, 26 (1997).

[5] K. P. Shamrai, Plasma Sources Sci. Technol. **7**, 499 (1998).

[6] V. Kopecky and J. Preinhaelter, *Linear Mode Conversion in an Inhomogeneous Magnetized Plasma* (Rozpravy CSAV, **93**(5), Praha, 1983).

[7] Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, УФН **109**(2), 225 (1973).

Поступила в редакцию 24 апреля 2008 г.