УДК 533.9

ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ НА ДИСПЕРСИЮ ВОЛНОВОДНОЙ ГЕЛИКОНОВОЙ МОДЫ

Ю. М. Алиев

Рассмотрено влияние радиального градиента плотности плазмы на дисперсию волноводной геликоновой моды. Для параболического профиля плотности получены условия, при которых частота волны пропорциональна квадрату аксиального волнового вектора.

На важную роль градиента плотности плазмы, перпендикулярного внешнему магнитному полю, в теории распространения волн в геликоновой области частот было указано в [1]. В частности, там было предсказано появление новых зон прозрачности и возможность локализации мод благодаря эффекту неоднородности плотности. В [2] было обнаружено, что невозможно объяснить с помощью дисперсионного соотношения для вистлеров в однородной плазме результаты экспериментов с плазмой геликонового разряда. На эксперименте частота геликоновой волны оказывалась пропорциональной квадрату аксиального волнового вектора в отличие от линейной зависимости согласно теории однородной плазмы. Недавно был выполнен численный эксперимент [3], где для Гауссова профиля плотности плазмы подтвержден квадратичный закон дисперсии. В [4] было показано, что новая функциональная зависимость в законе дисперсии геликона связана именно с определяющей ролью градиента плотности, поскольку этот член имеет специфическую частотную зависимость. В настоящей работе получены условия смены закона дисперсии геликона, распространяющегося вдоль замагниченного плазменного цилиндра в зависимости от радиального градиента плотности плазмы. Анализ основывается на решениях дифференциального уравнения для азимутальной компоненты напряженности электрического поля геликоновой волны $E_\theta(r,z,\theta,t) = E_\theta(r)\exp(-i\omega t + im\theta + ik_z z)$, имеющего вид [5]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}E_\theta\right) + 2\frac{\partial}{r\partial r}E_\theta + \frac{1-m^2}{r^2}E_\theta + a^2(r)E_\theta = 0, \qquad (1)$$

где

$$a^2(r) = \frac{\omega^2 g}{c^2 k_z^2}\left(\frac{m}{r}\frac{\partial \ln g}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}g - 2\frac{k_z^2}{m}\right),\ g \equiv \frac{\omega_{\rm pe}^2(r)}{\omega\omega_{\rm ce}},\ \omega_{\rm ce} = -eB_0/m_e c,\ \omega_{\rm pe}^2(r) = 4\pi e^2 n(r)/m_e.$$

Уравнение (1) применимо в области, где $m^2 \gg k_z^2 r^2$, и получается из полной системы уравнений Максвелла в предположении $E_z = 0$, что означает высокую проводимость плазмы вдоль внешнего магнитного поля, направленного по оси z. Для анализа влияния градиента плотности на дисперсию геликоновой моды рассмотрим два предельных случая, когда уравнение (1) может быть решено аналитически. В первом случае плазменного столба с однородной плотностью величина $a^2(r) = \text{const} = a_0^2$. В пределе высокой плотности плазмы, когда выполнено условие $|g| \gg 2\dfrac{c^2 k_z^2}{|m|\omega^2}$, имеем

$$a_0^2 = \frac{\omega^4}{c^4 k_z^2} g_0^2 = \frac{\omega^2 \omega_{\rm pe}^4(0)}{\omega_{\rm ce}^2 c^4 k_z^2}. \tag{2}$$

Во втором предельном случае рассматриваются условия, когда

$$\frac{m}{r}\frac{\partial \ln g}{\partial r} \gg \left|\frac{\omega^2}{c^2}g - 2\frac{k_z^2}{m}\right| \tag{3}$$

и эффект градиента плотности является определяющим. Это неравенство может выполняться только для моды с $m > 0$, когда левая часть (3) положительна. Для параболической зависимости плотности от радиуса $g = g_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ функция $a^2(r)$ при условии (3) является постоянной величиной и имеет вид

$$a^2(r) = -2\frac{\omega^2}{c^2 k_z^2}\frac{m}{R^2}g_0 = 2\frac{\omega}{|\omega_{\rm ce}|}\frac{\omega_{\rm pe}^2(0)}{c^2 k_z^2}\frac{m}{R^2}. \tag{4}$$

Для обоих пределов решение уравнения (1) в области плазмы имеет вид

$$E_\theta(r) = C_1 J_m(ar)/r. \tag{5}$$

Для решения уравнения (1) в области вакуума $r > R$ получаем

$$E_\theta(r) = C_2/r^2, \tag{6}$$

где $C_{1,2}$ – произвольные константы. Граничные условия находятся интегрированием (1) по узкому переходному слою в окрестности точки $r = R$

$$\int\limits_{R-\delta}^{R+\delta} r dr\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}E_\theta\right) + 2\frac{\partial}{r\partial r}E_\theta + \frac{\omega^2 g}{c^2 k_z^2}\left(\frac{m}{r}\frac{\partial \ln g}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}g - 2\frac{k_z^2}{m}\right)E_\theta\right] = 0 \tag{7}$$

и могут быть представлены в форме

$$\{E_\theta(x)\}_{r=R} = 0,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}E_\theta\right\}_{r=R} + \frac{m}{R}\frac{\omega^2}{c^2k_z^2}\{g\}_{r=R}E_\theta(R) = 0, \tag{8}$$

где скобки означают скачок соответствующей величины при переходе через точку $r = R$. Подстановка (5) и (6) в (8) приводит к системе уравнений

$$C_1 J_m(aR)/R = C_2/R^2,$$

$$C_1\left[\frac{\partial}{\partial r}[J_m(ar)/r]_{r=R} + \frac{m}{R}\frac{\omega^2}{c^2k_z^2}\{g\}_{r=R}J_m(aR)/R\right] = -2C_2/R^3. \tag{9}$$

Условие существования нетривиального решения системы (9) дает дисперсионное уравнение

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}[J_m(\xi)] + \left[m\frac{\omega^2}{c^2k_z^2}\{g\}_{r=R} + 1\right]J_m(\xi) = 0,\ \xi = aR. \tag{10}$$

Подставляя (2) в (10), с учетом условия $\left|m\frac{\omega^2 g_0}{c^2k_z^2}\right| \gg 1$, получаем дисперсионное соотношение для однородного плазменного цилиндра

$$\omega = |\omega_{\rm ce}|\frac{c^2\xi_n k_z}{\omega_{\rm pe}^2(0)R}, \tag{11}$$

где ξ_n – корни уравнения

$$J_m(\xi) = 0. \tag{12}$$

Из (10) находим, что дисперсионное соотношение для случая параболического профиля плотности плазмы имеет вид

$$\xi_n = aR, \tag{13}$$

где ξ_n – корни уравнения

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}[J_m(\xi)] + J_m(\xi) = 0, \tag{14}$$

и величина a в (13) определяется формулой (4). Подставляя (4) в (13), получаем дисперсионное соотношение для параболического профиля плотности плазмы

$$\omega = |\omega_{\rm ce}|\frac{c^2\xi_n^2k_z^2}{2m\omega_{\rm pe}^2(0)}. \tag{15}$$

Сравнивая (11) и (15), видим, что учет радиального градиента плотности плазмы приводит к изменению закона зависимости частоты от аксиального волнового числа моды. Причиной такого изменения является тот факт, что в уравнении (1) градиентный и неградиентный члены имеют различную частотную зависимость. Скейлинг k_z^2 в дисперсионном соотношении (15) был получен с помощью численных расчетов для Гауссова профиля плотности в [3] для параметров плазмы, когда условие (3) являлось выполненным. Как было отмечено выше, при этих же условиях мода $m = -1$ не может распространяться в неоднородном плазменном цилиндре, что было также подтверждено расчетами [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. З. Гусаков, М. А. Ирзак, А. Д. Пилия, Письма в ЖЭТФ **65**, 26 (1997).

[2] R. W. Boswell, Plasma Phys. Controlled Fusion **26**, 1147 (1984).

[3] G. Chen, A. V. Arefiev, R. D. Bengtson, et al., Phys. Plasma **13**, 123507 (2006).

[4] Ю. М. Алиев, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5, (2008).

[5] I. D. Sudit and F. F. Chen, Plasma Sources Sci.Technol. **3**, 602 (1994).

Поступила в редакцию 7 мая 2008 г.