

УДК 519.25

ОТОБРАЖЕНИЕ ХЕНОНА ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

А. Р. Каримов¹, Л. Н. Пятницкий¹, В. А. Щеглов

Изучается отображение Хенона с переменными управляющими параметрами. Показано, что ничтожно малые стохастические возмущения управляющих параметров способны привести к смене поведения системы.

Отображение Хенона позволяет наглядно выявлять геометрическую структуру фазового объема нелинейных систем и сделать заключение о характере явлений различной физической природы. В частности, данное отображение возникает при моделировании аттрактора Лоренса.

Поведение двумерного отображения Хенона

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n \quad (1)$$

обладает повышенной чувствительностью к начальным условиям и управляющим параметрам a и b . Для замкнутых систем считается, что a и b являются положительными константами, чья величина зависит от начальных условий и физической природы рассматриваемого явления [1 – 3]. В случае, когда на систему воздействуют внешние факторы, эти параметры могут меняться во времени. Поэтому возникает естественный вопрос, как незначительные вариации a и b будут проявляться в динамике системы. В работе обсуждаются особенности нерегулярного поведения отображения Хенона при стохастическом возмущении управляющих параметров.

Перепишем (1) в виде

$$x_{n+1} = 1 + bx_{n-1} - ax_n^2, \quad (2)$$

¹Институт высоких температур РАН.

отражающем его немарковский характер. Отображение (2) моделирует процесс с "короткой памятью", поскольку текущее состояние зависит только от двух "ближайших" предыдущих состояний системы. Отображение вида (2) является предельным, отделяющим марковские процессы от процессов с дальней памятью.

Остановимся на свойствах отображения (1), которые непосредственно определяются его формой. Отображение имеет якобиан

$$\frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = -b.$$

Поэтому при

$$|b| < 1 \tag{3}$$

происходит уменьшение фазового объема и всегда существует некоторое притягивающее множество, к которому при итерациях отображения сходятся все последовательности точек. В частности, когда

$$a > -\frac{(1-b)}{4}, \tag{4}$$

отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_{\pm} = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{\pm} = bx_{\pm}.$$

Эти точки являются устойчивыми, если в линеаризованном отображении (1) возмущения

$$\delta x_{n+1} = -2ax_{\pm}\delta x_n + \delta y_n, \quad \delta y_{n+1} = b\delta x_n \tag{5}$$

уменьшаются, т.е. существует такое $|\lambda| < 1$, что $\delta x_{n+1} = \lambda\delta x_n$ и $\delta y_{n+1} = \lambda\delta y_n$. В этом случае из (5) следует уравнение для определения λ :

$$\lambda^2 + 2ax_{\pm}\lambda - b = 0.$$

Его анализ показывает, что точка (x_-, y_-) всегда неустойчива, а точка (x_+, y_+) является устойчивой при

$$a < \frac{3(1-b)}{4}. \tag{6}$$

Условия (3), (4) и (6) задают область управляющих параметров, где отображение является регулярным. Однако все нетривиальные результаты для отображения Хенона были получены для неустойчивых неподвижных точек при выполнении условия (3). Различные численные расчеты показывают, что увеличение параметра a приводит к переходу от регулярных режимов к стохастическому поведению через последовательность

бифуркаций разделения на две частоты. При этом в зависимости от величин a и b последовательность может быть ограниченной или неограниченной.

Мы будем рассматривать поведение отображения Хенона с переменными коэффициентами для начальных условий, заданных вблизи неустойчивых точек и на границе выполнения условий (3) и (4). Представим a и b в виде

$$a = a_0 + \delta a_n, \quad b = b_0 + \delta b_n, \quad (7)$$

где a_0 и b_0 – постоянные величины, δa и δb – динамические возмущения управляющих параметров. Будем считать, что

$$\frac{\delta a}{a_0} \ll 1, \quad \frac{\delta b}{b_0} \ll 1.$$

Зависимости δa_n и δb_n от n могут носить как регулярный, так и случайный характер. Рассмотрим случай, когда возмущение имеет смешанный характер, т.е. отклонения δa_n и δb_n представим в виде:

$$\delta a_n = A_0 R_f(n) \sin(\omega n), \quad \delta b_n = B_0 R_f(n) \sin(\omega n), \quad (8)$$

где A_0 и B_0 – амплитуды возмущений, ω – частота возмущений, $R_f(n)$ – случайная функция, которая ставит данному n в соответствие случайное число, равномерно распределенное на отрезке $0 \leq R_f \leq 1$.

Рассмотрим отображение Хенона при $a_0 = 10^{-3}$, $b_0 = 0.99$. Данные величины управляющих параметров отвечают устойчивому режиму, но близкому к неустойчивости, а незначительное увеличение b приводит к нарушению условий (3) и (4). Во всех расчетах использовались одинаковые начальные условия: $x_0 = y_0 = 0.5$. Геометрическая структура множества, порождаемого отображением Хенона, наглядно передается псевдофазовым портретом, построенным в плоскости (x_n, y_n) , при различных значениях параметров A_0 , B_0 и ω для выбранных a_0 и b_0 . Псевдофазовые портреты строились по $5 \cdot 10^3$ точкам отображения.

Псевдофазовый портрет для невозмущенного процесса ($A_0 = B_0 = 0$) приведен на рис. 1. Видно, что реализуется нерегулярный режим, поскольку траектория в псевдофазовой плоскости представляет собой незамкнутую последовательность точек. Однако классифицировать данный процесс как хаотический тоже нельзя – нет тенденции заполнения всей псевдофазовой плоскости, точки последовательности образуют множество, ограниченное на псевдофазовой плоскости.

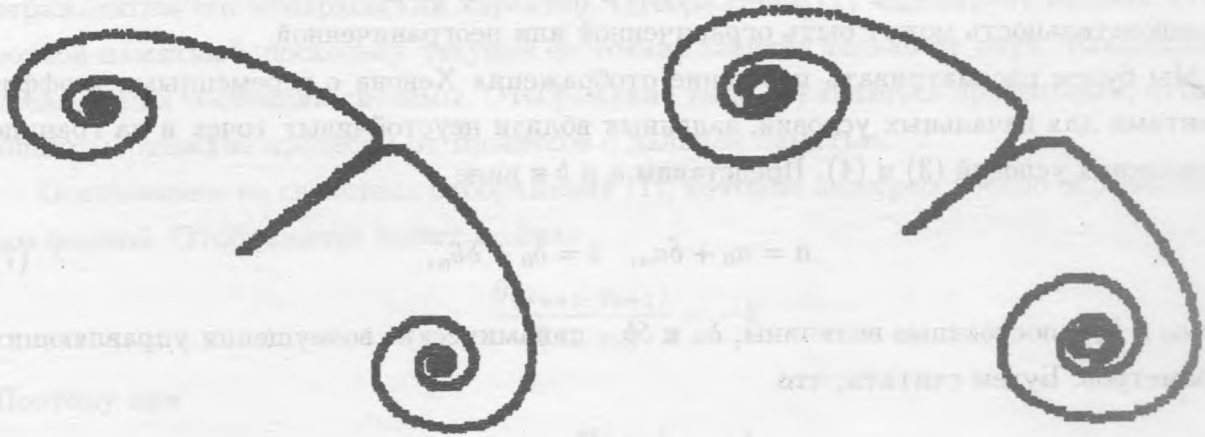


Рис. 1. Псевдофазовый портрет для $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ в плоскости (x_n, y_n) .

Рис. 2. Псевдофазовый портрет для $A_0 = 7 \cdot 10^{-6}$, $B_0 = 7 \cdot 10^{-3}$.

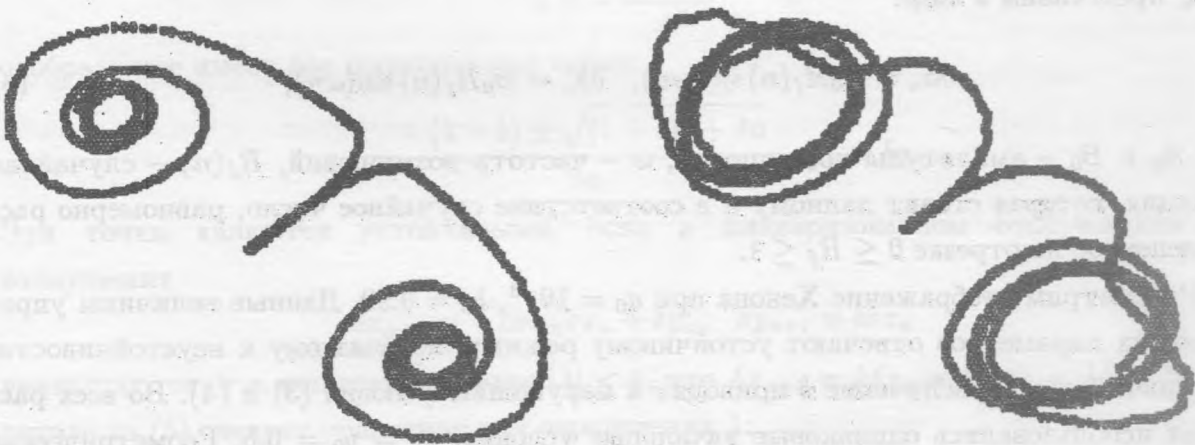


Рис. 3. Псевдофазовый портрет для $A_0 = 1 \cdot 10^{-5}$, $B_0 = 1 \cdot 10^{-2}$.

Рис. 4. Псевдофазовый портрет для $A_0 = 3 \cdot 10^{-5}$, $B_0 = 3 \cdot 10^{-2}$.

Возмущенный процесс развивается принципиально по-другому. Форма предельного множества очень чувствительна к вариации параметров A_0 , B_0 и ω . Рис. 2–5 иллюстрируют характерные изменения псевдофазового портрета.

Распределение на рис. 2 получено при $A_0 = 7 \cdot 10^{-6}$ и $B_0 = 7 \cdot 10^{-3}$, т.е. амплитуда возмущений не превышала 0.1% от a_0 и b_0 , частота возмущений составляла величину $\omega = 1 \cdot 10^5$. Неподвижные точки исчезают, вместо них отображение порождает на

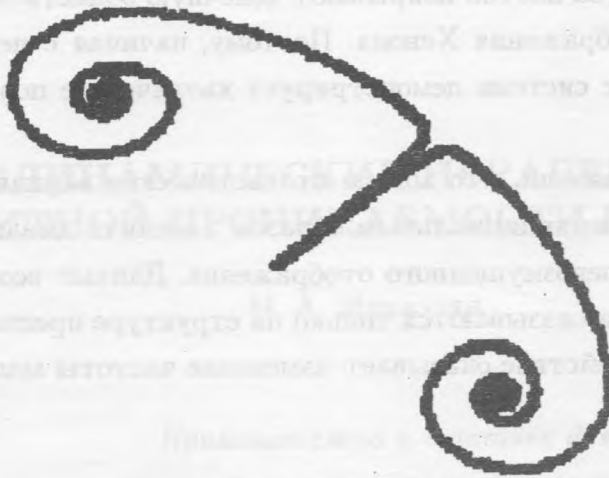


Рис. 5. Псевдофазовый портрет для $A_0 = 1 \cdot 10^{-5}$, $B_0 = 1 \cdot 10^{-2}$, $\delta\omega = 9 \cdot 10^{-6}\omega$.

псевдофазовой плоскости множество точек, имеющее четкую геометрическую структуру, напоминающую кольцо. Точки предельного множества заполняют плоскость столь плотно, что оно выглядит, как континуум. Поэтому в данной области система должна демонстрировать хаотическое поведение. При этом x_n меняются в ограниченных пределах.

С ростом амплитуд возмущающих параметров плотность заполнения уменьшается, геометрическая структура предельного множества искажается. Распределение на рис. 3 и 4 ($A_0 = 1 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-5}$ и $B_0 = 1 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-2}$) наглядно иллюстрирует данную особенность. По сравнению с рис. 2 портрет становится более "неупорядоченным" и занимает большую площадь, но кольцевая структура предельного множества сохраняется. Более того, в этом случае на портрете прослеживаются отдельные траектории, что свидетельствует о более регулярном поведении системы при увеличении стохастических колебаний управляющих параметров – шум приводит к более регулярному поведению системы. Тем не менее, приведенные примеры позволяют сделать заключение о том, что малые вариации $\delta a(n)$ и $\delta b(n)$ не способны привести к структурной перестройке предельного множества, изображенного на рис. 2 и рис. 3. Система будет совершать колебания в ограниченной области у предельных точек.

Рассматриваемое отображение демонстрирует повышенную чувствительность к изменению частоты ω . Как видно из рис. 5, ничтожное увеличение частоты на $\delta\omega = 9 \cdot 10^{-6}\omega$ при $A_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ и $B_0 = 1 \cdot 10^{-2}$ полностью меняет структуру предельного

множества. Точки множества плотно покрывают конечную область вблизи предельных точек невозмущенного отображения Хенона. Поэтому, начиная с некоторого момента времени (n), в этом случае система демонстрирует хаотическое поведение в конечной области.

Таким образом, мы показали, что малые стохастические вариации (2) управляющих параметров способны принципиальным образом изменить динамику отображения вблизи предельных точек невозмущенного отображения. Данные возмущения не меняют общего вида портрета, а сказываются только на структуре предельного множества. При этом наибольшее воздействие оказывает изменение частоты модуляции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H e n o n M. Commun. Math. Phys., **50**, 69 (1976).
- [2] Ш у с т е р Г. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988.
- [3] H i t z l D. L., Z e l e F. J. Stat. Phys., **26**, 683 (1981).

Поступила в редакцию 9 октября 2002 г.