

УДК 537.311.33

КОНДЕНСАЦИЯ ЭКСИТОНОВ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Н. М. Вильданов¹, А. П. Силин

Рассчитана поправка по плотности к химическому потенциалу экситонов в сильном магнитном поле. Исследованы возможности бозе-конденсации экситонов и конденсации их в электронно-дырочную жидкость (ЭДЖ). Указано в каких интервалах магнитных полей можно наблюдать эти процессы.

Конденсация экситонов в полупроводниках привлекает заметное внимание теоретиков и экспериментаторов [1–6].

Мы рассматриваем экситонный газ малой плотности в достаточно сильных магнитных полях при низких температурах. В сильных магнитных полях, таких что расстояние между уровнями Ландау $e\hbar H/m_{e,h}c$ существенно превосходит характерную энергию кулоновского взаимодействия (энергию связи экситона в отсутствие магнитного поля) $E_x = \frac{me^4}{2\varepsilon^2\hbar^2}$, т.е. $H \gg H_c = \frac{m^2e^3c}{\varepsilon^2\hbar^3} = 2.35 \cdot 10^9 \text{ Э} \cdot \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2}$, спины носителей тока ориентированы вдоль магнитного поля и выживают только синглетные экситоны [7]. Здесь $m_{e,h}$ – эффективные массы электрона и дырки, $m = m_e m_h / (m_e + m_h)$, m_0 – масса свободного электрона, \hbar – постоянная Планка, e – заряд электрона, ε – статическая диэлектрическая проницаемость. В дальнейшем мы используем систему единиц $e^2/\varepsilon = m_e/2 = m_h/2 = \hbar = 1$. Характерные магнитные поля H_c могут изменяться в широких пределах в зависимости от используемого полупроводника.

При повышении плотности экситонов возможна бозе-конденсация экситонов [6] (конденсация в пространстве импульсов), а также конденсация в обычном пространстве, т.е. образование ЭДЖ, которая может обладать как металлическим, так и диэлектрическим спектром [8, 9]. Целью этой работы является исследование этих возможностей.

¹Московский физико-технический институт.

Для образования бозе-конденсата экситоны должны отталкиваться, этому способствует наложение сильного магнитного поля, в котором невозможно образование экситонных молекул (биэкситонов). Для образования ЭДЖ необходимо, чтобы экситонный газ был термодинамически неустойчив, следовательно выполнялось соотношение

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial n}\right)_{T,V} < 0, \quad (1)$$

где μ – химический потенциал экситона, n – плотность экситонов, т.е. энергия связи экситона должна быть меньше энергии связи ЭДЖ.

В работе [9] было показано, что учет электронно-дырочных корреляций приводит к тому, что соотношение (1) выполняется в отсутствие магнитного поля. Сверхтекучесть экситонного газа плотности

$$n \ll H \ln H, \quad (2)$$

в магнитном поле исследовалась при помощи канонического преобразования, учитывающего когерентное спаривание электронов и дырок, в работе [5]. В этой работе было получено, что соотношение (1) не выполняется и экситонный газ устойчив относительно образования ЭДЖ (результаты этой работы будут воспроизведены ниже с некоторыми уточнениями), однако авторы этой работы не учли два эффекта, которые приводят к неустойчивости экситонного газа.

Первый эффект – электронно-дырочные корреляции, которые приводят к образованию ЭДЖ с диэлектрическими свойствами [9].

Второй эффект – образование металлической ЭДЖ в сильных магнитных полях при высоких плотностях [10], когда выполняется следующее соотношение

$$H \ll n \ll H^{4/3}. \quad (3)$$

При выполнении условия (3), энергия, приходящаяся на электронно-дырочную пару [10],

$$E_{\text{ЕНЛ}} = -0.5H^{2/7}, \quad (4)$$

при равновесной плотности

$$n_{\text{ЕНЛ}} \sim H^{8/7} \quad (5)$$

превосходит по абсолютной величине энергию экситона $E_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \ln^2 H$ [12, 13] при $H \gtrsim \ln^7 H$, т.е. при $H \gtrsim 10^7$. В этом случае экситонный газ низкой плотности будет неустойчив относительно конденсации в более энергетически выгодную металлическую ЭДЖ с концентрацией $n_{\text{ЕНЛ}}$ (5).

Гамильтониан электронов и дырок, взаимодействующих по закону Кулона, во внешнем магнитном поле имеет вид [5]

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} (\varepsilon_{\mathbf{p}}^e - \mu_e) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + (\varepsilon_{\mathbf{p}}^h - \mu_h) b_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - 2a_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}), \quad (6)$$

где $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}, b_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ – операторы рождения электронов и дырок с квазиимпульсом \mathbf{p} , μ_e, μ_h – химические потенциалы электронов и дырок, определяемые условием

$$\sum_{\mathbf{p}} \langle a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \langle b_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}} \rangle = N, \quad (7)$$

N – число электронов и дырок, $\langle \dots \rangle$ – означает усреднение по основному состоянию

$$V_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}}^{e(h)} = \frac{1}{4} (\mathbf{p} \pm \frac{1}{c} \mathbf{A})^2, \quad \mathbf{A} = [\mathbf{H}, \mathbf{r}]/2.$$

Для построения нулевого приближения системы электронов и дырок, взаимодействующих по закону Кулона, используем приближение Хартри–Фока как для больших, так и для малых плотностей, когда описывается бозе-конденсированное состояние экситонов, и введем каноническое преобразование [3]

$$\alpha_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad \beta_{\mathbf{p}} = v_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + u_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2 = 1. \quad (8)$$

Тогда гамильтониан (6), выраженный через новые операторы, имеет вид

$$\hat{H} = U \{v_{\mathbf{p}}\} + H_0 + H_i - \mu N, \quad (9)$$

где $U \{v_{\mathbf{p}}\}$ – числовой функционал, выделяющийся после приведения преобразованного гамильтониана к нормальной форме,

$$U \{v_{\mathbf{p}}\} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} (v_{\mathbf{p}}^2 v_{\mathbf{q}}^2 + u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{q}}), \quad (10)$$

$$\mu = \mu_e + \mu_h, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^e + \varepsilon_{\mathbf{p}}^h,$$

H_0 и H_i – операторы, содержащие парные и четверные комбинации фермиевских операторов $\alpha_{\mathbf{p}}$ и $\beta_{\mathbf{p}}$, явный вид которых можно найти в [11].

В самосогласованном приближении энергия электронно-дырочной пары определяется минимизацией числового функционала $U \{v_{\mathbf{p}}\}$ с учетом условия (7), которое после преобразования (8), имеет вид [3]

$$\sum_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 = n. \quad (11)$$

Уравнение, определяющее минимум функционала $U\{v_p\}$, имеет вид:

$$(\varepsilon_p - \mu) v_p u_p - \sum_q V_{p-q} (u_q v_q v_p^2 - u_p v_p v_q^2) = 0. \quad (12)$$

Это уравнение необходимо решать совместно с условиями нормировки (11). В низшем порядке по плотности (т.е. с точностью до $v_p \sim \sqrt{n}$) получается уравнение Шредингера для электрона и дырки, взаимодействующих по закону Кулона, причем μ равно энергии основного состояния экситона

$$(\varepsilon_p - \mu) v_p - \sum_q V_{p-q} v_q = 0. \quad (13)$$

В случае сильного магнитного поля нормированные волновые функции экситона имеют вид [12, 13]:

$$v_p = 2\sqrt{2\pi} \lambda e^{-\lambda^2 p_{\perp}^2} \cdot \frac{2\alpha^{3/2}}{\alpha^2 + p_z^2} \cdot \sqrt{n}, \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{H}}, \quad \alpha = \ln H,$$

где мы ввели продольную p_z и поперечную p_{\perp} относительно магнитного поля составляющие импульса относительного движения электрона и дырки. В силу предполагаемого нами условия (2) $v_p \sim \sqrt{\frac{n}{\alpha H}} \ll 1$, и поэтому разложение в (12) правомерно. Оно аналогично разложению по n в отсутствие магнитного поля [3, 9, 11].

Определим теперь поправку по плотности к химическому потенциалу в самосогласованном приближении

$$\delta\mu_0 = \frac{2}{n} \sum_{pq} V_{p-q} (v_q v_p^3 - v_p^2 v_q^2) = \frac{4\pi n \alpha}{H}. \quad (15)$$

Здесь при вычислении интегралов по поперечным импульсам мы использовали следующее соотношение

$$\lambda^2 \int \frac{d^2 p_{\perp} d^2 q_{\perp}}{(p-q)^2} e^{-\lambda^2(xp_{\perp}^2 + yq_{\perp}^2)} \approx \frac{\pi^2 \alpha}{x+y}, \quad x \sim y \sim 1, \quad (16)$$

где предполагается, что $p_z, q_z \sim \alpha$, т.к. именно область импульсов $p_z, q_z \sim \alpha$, $p_{\perp}, q_{\perp} \sim 1/\lambda$ дает главный вклад в (15).

В работе [3] показано, что корреляционный вклад в химический потенциал (линейные поправки по плотности) дается диаграммой, приведенной на рис. 1. Линии

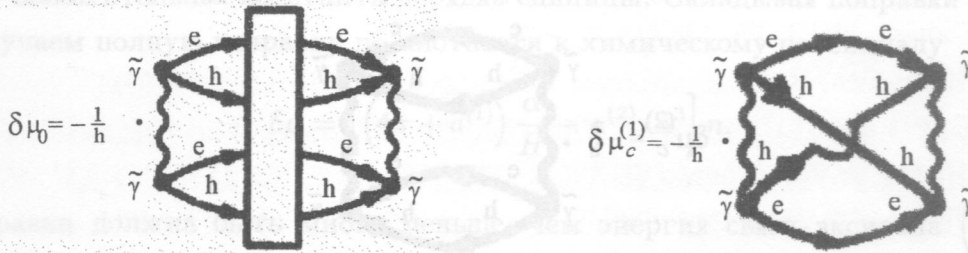


Рис. 1. Диаграмма корреляционного вклада в химический потенциал.

Рис. 2. Диаграмма обменного вклада в химический потенциал.

с индексами e и h означают гриновские функции квазичастиц α_p и β_p , соответственно [11]

$$G_0^{e,h}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{2e^{-\lambda^2 p_1^2}}{\varepsilon - E_p^{e,h} + i0}, \quad (17)$$

где

$$E_p^{e,h} = (u_p^2 - v_p^2) \left(\varepsilon_p^{e,h} - \mu_{e,h} - \sum_q V_{p-q} v_q^2 \right) + 2u_p v_p \sum_q V_{p-q} v_q u_q,$$

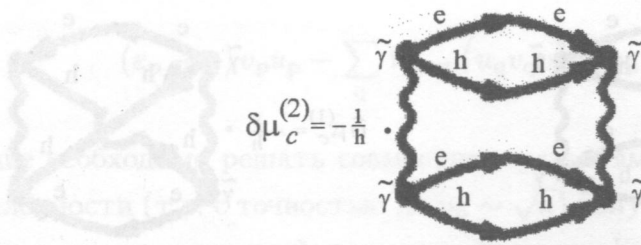
а происхождение множителя $2e^{-\lambda^2 p_1^2}$ определяется нормировкой. “Кирпич” на этом рисунке означает, что четыре фермиевские линии всевозможными способами соединены друг с другом линиями взаимодействия (при этом он не содержит вершинных множителей $\tilde{\gamma}_{p,p'} = v_p u_{p'} - v_{p'} u_p \propto \sqrt{n}$, связанных с рождением электронно-дырочных пар). Слева фермиевские линии замыкаются на амплитуду рождения двух пар квазичастиц, справа – на амплитуду уничтожения. В “кирпич” входят амплитуды рассеяния двух, трех и четырех квазичастиц друг на друге [3]. Для оценки мы будем учитывать только последние. Они хорошо иллюстрируют важность корреляционной энергии. Опускаемые члены будут того же порядка по плотности.

Так как мы предполагаем, что $v_p \ll 1$, то можно положить $u_p = 1$, $\tilde{\gamma}_{pp'} = v_p - v_{p'}$, $E_p^{e,h}(\mathbf{p}) = (p_z^2 + \alpha^2)/4$. Поэтому функции Грина (17) примут следующий вид

$$G_0^{e,h}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{2e^{-\lambda^2 p_1^2}}{\varepsilon - (p_z^2 + \alpha^2)/4 + i0}. \quad (18)$$

Обменной диаграмме (рис. 2) соответствует следующее аналитическое выражение (здесь мы перешли к мнимым частотам)

$$\delta\mu_c^{(1)} = -\frac{1}{n} \int \frac{4\pi}{k^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{4\pi}{q^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \times$$



$$\delta\mu_c^{(2)} = -\frac{1}{h}$$

Рис. 3. Диаграмма прямого вклада в химический потенциал.

$$\begin{aligned} & \times \tilde{\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) G_0^e(i\varepsilon + i\omega, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \tilde{\gamma}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{q}) G_0^h(-i\varepsilon - i\omega - i\Omega, -\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ & \times \tilde{\gamma}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{q}) G_0^e(i\varepsilon + i\Omega, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) G_0^h(-i\varepsilon, -\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (19)$$

Мы оценим это выражение по порядку величины. Главный вклад в интеграл (19) дает область импульсов

$$p_z \sim q_z \sim k_z \sim \alpha, \quad p_{\perp} \sim q_{\perp} \sim k_{\perp} \sim 1/\lambda, \quad (20)$$

что дает следующую оценку

$$\delta\mu_c^{(1)} = a^{(1)} n\alpha/H, \quad (21)$$

($a^{(1)}$ – положительная константа порядка единицы), следовательно, этот вклад такого же порядка, как и (15).

В случае прямой диаграммы (рис. 3)

$$\delta\mu_c^{(2)} = \frac{1}{n} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} V_{\mathbf{k}}^2 \Pi_{eh}^2(i\omega, \mathbf{k}), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{eh}(i\omega, \mathbf{k}) = & \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \cdot (\tilde{\gamma}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{k}) G_0^e(i\varepsilon, \mathbf{p}) G_0^h(-i\varepsilon + i\omega, -\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \\ & + \tilde{\gamma}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{k}) G_0^e(i\varepsilon, \mathbf{p}) G_0^h(-i\varepsilon - i\omega, -\mathbf{p} - \mathbf{k})). \end{aligned}$$

Главный вклад в интеграл (22) дает область импульсов

$$p_z \sim q_z \sim k_z \sim k_{\perp} \sim \alpha, \quad p_{\perp} \sim q_{\perp} \sim 1/\lambda, \quad (23)$$

что дает

$$\delta\mu_c^{(2)} = -a^{(2)} n/\alpha^3, \quad (24)$$

где $a^{(2)}$ – положительная константа порядка единицы. Складывая поправки (15), (21) и (24), получаем полную поправку по плотности к химическому потенциалу

$$\delta\mu = \left[(4\pi + a^{(1)}) \frac{\alpha}{H} - a^{(2)}/\alpha^3 \right] n. \quad (25)$$

Эта поправка должна быть много меньше, чем энергия связи экситона $\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right)$, что накладывает следующее ограничение $n \ll \min\{\alpha^5, \alpha H\}$. Поведение экситонного газа будет различным при изменении магнитного поля. Если $\alpha^4 \ll H$, т.е. $H \gg 10^4$, поправка к химическому потенциалу будет отрицательна, экситонный газ неустойчив (выполняется соотношение (1)) и образуется ЭДЖ, причем при $\alpha^4 \ll H \lesssim \alpha^7$, т.е. при $10^4 \ll H \lesssim 10^7$, образуется диэлектрическая ЭДЖ [3, 9, 11], а при $H \gtrsim 10^7$ образуется металлическая ЭДЖ [8, 10]. Таким образом, при $H \sim 10^7$ в ЭДЖ происходит переход металл-диэлектрик, аналогичный переходу в ЭДЖ в отсутствие магнитного поля [14, 15].

Если $\alpha^2 \ll H \ll \alpha^4$, т.е. $10 \ll H \ll 10^4$, поправка к химическому потенциалу положительна, соотношение (1) не выполняется, основное состояние, построенное из экситонов, устойчиво и возможна бозе-конденсация [5]. Ограничение на магнитные поля снизу связано с тем, что магнитное поле должно быть сильным, т.е. расстояние между уровнями Ландау ($\sim H$) должно быть много больше энергии связи экситона ($\sim \alpha^2$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. M. Blatt and K. W. Boer, Phys. Rev. **126**, 1621 (1962).
- [2] С. А. Москаленко, ФТТ **4**, 276 (1962).
- [3] Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978(1968); Письма в ЖЭТФ **5**, 238 (1967).
- [4] D. W. Snoke, J. P. Wolfe, and A. Mysyrovicz, Phys. Rev. B **41**, 11171 (1990).
- [5] A. A. Korolev and M. A. Liberman, Phys. Rev. Lett. **72**, 270 (1994).
- [6] *Bose-Einstein Condensation*, eds. A. Griffin, D. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, 1995).
- [7] Н. М. Вильданов, А. П. Силин, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 12, 38 (2007).
- [8] *Электронно-дырочные капли в полупроводниках*. Под ред. К. Д. Джеффриса и Л. В. Келдыша (М., Наука, 1988).
- [9] Л. В. Келдыш, А. П. Силин, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 8, 33 (1975).

- [10] Л. В. Келдыш, Т. А. Онищенко, Письма в ЖЭТФ **24**, 70 (1976).
- [11] А. П. Силин, ФТТ **19**, 134 (1977).
- [12] Б. Б. Кадомцев, В. С. Кудрявцев, Письма в ЖЭТФ **13**, 61 (1971).
- [13] R. J. Elliott and R. Loudon, J. Phys. Chem. Sol. **15**, 196 (1960).
- [14] В. Е. Бисти, А. П. Силин, ФТТ **20**, 1850 (1978).
- [15] А. Н. Лобаев, А. П. Силин, ФТТ **26**, 2910 (1984).

Поступила в редакцию 10 марта 2008 г.