УДК 531/534.01:51–72

НЕВОЗМОЖНОСТЬ СВЕДЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ N ЧАСТИЦ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ К m-ЧАСТИЧНЫМ (2 < m < N) ДВИЖЕНИЯМ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

А. М. Бойченко

Показано, что в классической механике при наличии полного интеграла задачу движения системы N частиц с парным взаимодействием нельзя свести к задачам движения $2 < m < N$ частиц в относительных координатах.

Решению задач о движении N частиц посвящена многочисленная литература (см., напр., [1–7]). Облегчающим обстоятельством здесь могло бы быть сведение данной задачи к задачам о движении меньшего числа частиц. При рассмотрении взаимодействия частиц между собой через парные потенциалы, зависящие от относительных координат, особый интерес представляет вопрос о возможности сведения задачи к задачам о движении меньшего числа частиц в относительных координатах. В работе [8] получено условие сведения задачи о движении N частиц к таким двухчастичным задачам. Класс задач, сводимых к двухчастичным, оказался очень узким. Однако оказывается, что класс задач, сводимых к задачам меньшего числа частиц, чем N, в точности совпадает с классом задач, сводимых к двухчастичным. С помощью метода, предложенного в упомянутой работе (см. также [9]), мы покажем, что задача сводится к m-частичным ($m < N$) задачам в относительных координатах только тогда, когда она в этих координатах сводится к двухчастичным задачам. Мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай, когда система разбивается на совокупность не взаимодействующих друг с другом подсистем.

Представление относительного движения частиц в системе. Пусть у нас имеется система N частиц, характеризующаяся гамильтонианом H

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N) = T + U, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, m_i$ – радиус-векторы, импульсы и массы входящих в систему частиц. В работе [8] показано, что уравнение Гамильтона–Якоби

$$H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_1}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_N}, \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\right) = h \tag{2}$$

для функции φ эквивалентно уравнению Гамильтона–Якоби

$$\sum_{i>j}\left(\frac{1}{2\mu_{ij}}\left(\frac{\partial V}{\partial\mathbf{r}_{ij}}\right)^2 + U(\mathbf{r}_{ij})\right) + \frac{1}{2M}\left(\frac{\partial V}{\partial\mathbf{R}}\right)^2 = h \tag{3}$$

для функции V при переходе к представлению, в котором функция φ выражена не через координаты частиц, а через их относительные координаты

$$\varphi(..., \mathbf{r}_i, ...) = V(\mathbf{R}, ..., \mathbf{r}_{ij}, ...), \tag{4}$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор центра инерции системы. Эти уравнения эквивалентны при наличии дополнительных связей:

$$\frac{\mathbf{p}_{ij}^{ijk}}{\mu_{ij}} + \frac{\mathbf{p}_{jk}^{ijk}}{\mu_{jk}} + \frac{\mathbf{p}_{ki}^{ijk}}{\mu_{ki}} = 0$$

либо

$$m_k\mathbf{p}_{ij}^{ijk} + m_i\mathbf{p}_{jk}^{ijk} + m_j\mathbf{p}_{ki}^{ijk} = 0, \tag{5}$$

которые возникают из-за того, что для произвольных трех частиц ijk, входящих в систему, тождественно выполняется условие:

$$\mathbf{r}_{ij}^{ijk} + \mathbf{r}_{jk}^{ijk} + \mathbf{r}_{ki}^{ijk} = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, а индексы ijk, стоящие вверху векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, обозначают произвольную рассматриваемую трехчастичную подсистему системы N частиц, состоящую из частиц i, j и k. Здесь $\mathbf{p}_{ij} = \mu_{ij}\mathbf{v}_{ij} = \mu_{ij}\dot{\mathbf{r}}_{ij} = \mu_{ij}(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)$, μ_{ij} – приведенная масса частиц i и j, которая для системы N частиц имеет вид [8, 9]:

$$\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{M},$$

где $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса частиц системы. Представление (3) соответствует гамильтониану

$$\tilde{H} = \sum_{i>j}\left(\frac{\mathbf{p}_{ij}^2}{2\mu_{ij}} + U(\mathbf{r}_{ij})\right) + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \tag{7}$$

где $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i$ – полный импульс системы. Отметим, что существует взаимнооднозначное соответствие между переменными $\mathbf{r}_i$ и переменными $\mathbf{R}, \mathbf{r}_{ij}$ [8, 9]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_k = \mathbf{R} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{m_i \mathbf{r}_{ki}}{M} \\ \mathbf{R} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{m_i \mathbf{r}_i}{M} \\ \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрение задач о движении частиц, сводимых к задачам о движении меньшего числа частиц в относительных координатах. Вид уравнения Гамильтона–Якоби. Индексами в скобках вверху мы будем обозначать функции и константы, относящиеся к соответствующей задаче. Итак, для задачи движения N частиц уравнение Гамильтона–Якоби для $V^{(N)}$ имеет вид (3), где в сумме по индексам i, j участвуют частицы $1, ..., N$. Константа h по нашему соглашению обозначается как $h^{(N)}$. Если задача свелась к m-частичным задачам, то мы будем иметь совокупность уравнений (10) для $V^{(m)}$, где в сумме по индексам i, j участвуют частицы, входящие в эту m-частичную подсистему. Константами h будут $h^{(m)}$. Итак, левую часть уравнения (3) для системы N частиц можно разбить на сумму левых частей уравнений (10) (см. ниже) для систем m частиц так, что

$$\sum_{i>j}^{(N)} \left(\frac{1}{2\mu_{ij}^{(N)}} \left(\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^2 + U^{(N)}(\mathbf{r}_{ij}) \right) + \frac{1}{2M^{(N)}} \left(\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{R}^{(N)}} \right)^2 =$$

$$= \sum_m \left(\sum_{i>j}^{(m)} \left(\frac{1}{2\mu_{ij}^{(m)}} \left(\frac{\partial V^{(m)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^2 + U^{(m)}(\mathbf{r})_{ij} + \alpha^{(m)} \right) \right) + \alpha, \tag{9}$$

в результате чего мы можем сделать некоторые выводы относительно вида функции V (см. ниже). В этих уравнениях $U^{(N)}$ могут отличаться от $U^{(m)}$, должны лишь выполняться условия

$$\sum_m \sum_{i>j}^{(m)} U^{(m)}(\mathbf{r}_{ij}) = \sum_{i>j}^{(N)} U^{(N)}(\mathbf{r}_{ij}),$$

$$\sum_m \left(\sum_{i>j}^{(m)} \left(\frac{1}{2\mu_{ij}^{(m)}} \left(\frac{\partial V^{(m)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^2 + \alpha^{(m)} \right) \right) + \alpha =$$

$$= \sum_{i>j}^{(N)} \left(\frac{1}{2\mu_{ij}^{(N)}} \left(\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2M^{(N)}} \left(\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{R}^{(N)}} \right)^2,$$

где $\alpha^{(m)}$ являются, вообще говоря, произвольными слагаемыми, зависящими от относительных координат подсистемы m, а α – постоянное слагаемое, учитывающее движение центра инерции системы N частиц. Рассмотрим какое-либо слагаемое из суммы по m из правой части уравнения (9). Поскольку задача сводится к задачам о движении $m < N$ частиц, то это слагаемое должно соответствовать какой-то задаче о движении m частиц, и это слагаемое должно быть постоянным:

$$\sum_{i>j}^{(m)} \left(\frac{1}{2\mu_{ij}^{(m)}} \left(\frac{\partial V^{(m)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^2 + U^{(m)}(\mathbf{r}_{ij}) + \alpha^{(m)} \right) = h^{(m)}. \tag{10}$$

В силу (9) постоянные h должны удовлетворять уравнению

$$\sum_m h^{(m)} + \alpha = h^{(N)},$$

где при наличии полного интеграла φ каждая из констант $h^{(m)}$ будет некоторой функцией от констант этого полного интеграла.

Выражения для $\mathbf{p}_{ij}$. Из сопоставления (3) и (7) видно, что величинам $\mathbf{p}_{ij}$ должны соответствовать величины

$$\mathbf{p}_{ij} = \frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \tag{11}$$

(при этом должны выполняться условия (5)). Так как $\mathbf{p}_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям (5), то тем самым должны удовлетворяться уравнения

$$\frac{1}{\mu_{ij}} \frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} + \frac{1}{\mu_{jk}} \frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{jk}} + \frac{1}{\mu_{ki}} \frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ki}} = 0. \tag{5a}$$

Справедливость (11) и (5a) можно проверить непосредственным вычислением. Действительно, поскольку φ – полный интеграл, то $\mathbf{p}_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_i}$ и

$$\mathbf{p}_{ij} = \mu_{ij}(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) = \mu_{ij} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_j} \right). \tag{12}$$

Используя (8), можно записать

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \varphi = \left(\sum_{k \neq i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ik}} + \frac{m_i}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) V,$$

где использовано правило дифференцирования сложной функции с учетом (4). В результате в (12) возникнут разности, которые благодаря (5a) можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ik}} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{jk}} \right) V = \frac{m_k}{M} \left(\frac{1}{\mu_{ik}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ik}} + \frac{1}{\mu_{kj}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{kj}} \right) V = \frac{m_k}{M} \frac{1}{\mu_{ij}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ij}} V,$$

где использовано равенство $\mathbf{r}_{jk} = -\mathbf{r}_{kj}$. В результате подстановки последних выражений в (12) получаем (11).

Невозможность сведения задачи о движении N частиц к задачам о движении меньшего числа частиц в относительных координатах. Рассмотрим определенную подсистему из m частиц, по которым ведется суммирование в правой части уравнения (9), соответствующая функция $V^{(m)}$, следовательно, содержит только аргументы $\mathbf{r}_{ij}$ для частиц i, j, входящих в эту подсистему. Если задача N частиц свелась к задачам меньшего числа частиц, причем тривиальный случай, когда система распадается на невзаимодействующие подсистемы, мы исключили, то всегда найдется такая пара частиц i и j и такая частица l (не входящая в эту подсистему m частиц), что $\mathbf{r}_{il}$ и $\mathbf{r}_{jl}$ не будут содержаться среди аргументов функции $V^{(m)}$ и такая, что все три частицы i, j и l принадлежат некоторой подсистеме n. Эта подсистема принадлежит подсистемам, к которым сводится движение N частиц и которая также входит в сумму правой части уравнения (9). Если говорить точнее, то поскольку подсистема n не является подсистемой подсистемы m, то всегда в подсистеме n найдется частица q, не входящая в подсистему m, а в подсистеме m найдется частица p, не входящая в подсистему n. Рассмотрим теперь тройку частиц i, p и q. Разложим градиент $\frac{1}{\mu_{ip}}\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ip}}$ по составляющим вектора $\mathbf{r}_{ip}$:

$$\frac{1}{\mu_{ip}}\frac{\partial V^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_{ip}} = A^x_{ip}\mathbf{r}^x_{ip} + A^y_{ip}\mathbf{r}^y_{ip} + A^z_{ip}\mathbf{r}^z_{ip}, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}^\alpha_{ip} = (\mathbf{r}_{ip}\mathbf{e}_\alpha)\mathbf{e}_\alpha = r^\alpha_{ip}\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = x, y, z$, а вектора $\mathbf{e}$ – ортонормированные вектора декартовой системы координат. При рассмотрении определенной тройки частиц (в данном случае i, p, q) будем использовать такую локальную декартовую систему координат, для которой все $\mathbf{r}^\alpha_{ip}, \mathbf{r}^\alpha_{pq}, \mathbf{r}^\alpha_{qi} \neq 0$. Рассмотрим какую-либо составляющую уравнения (5а), например, x-ую на траекториях системы, получим

$$A^x_{ip}\mathbf{r}^x_{ip} + A^x_{pq}\mathbf{r}^x_{pq} + A^x_{qi}\mathbf{r}^x_{qi} = 0. \tag{5б}$$

Из сравнения с x-ой составляющей уравнения (6) получаем, что должно выполняться

$$-\mathbf{r}^x_{pq} = \mathbf{r}^x_{qi} + \mathbf{r}^x_{ip} = \frac{A^x_{qi}}{A^x_{pq}}\mathbf{r}^x_{qi} + \frac{A^x_{ip}}{A^x_{pq}}\mathbf{r}^x_{ip} \tag{14}$$

или

$$\frac{r^x_{qi}}{r^x_{ip}} = -\frac{A^x_{ip} - A^x_{pq}}{A^x_{qi} - A^x_{pq}}. \tag{15}$$

Аналогичные соотношения можно написать для y-ых и z-ых составляющих вектора $\mathbf{r}_{iq}$. Выразим из (15) A^{α}_{pq}:

$$A^{\alpha}_{pq} = \frac{A^{\alpha}_{qi} r^{\alpha}_{qi} + A^{\alpha}_{ip} r^{\alpha}_{ip}}{r^{\alpha}_{qi} + r^{\alpha}_{ip}}. \tag{16}$$

Поскольку задача свелась к движению в подсистеме m, то можно считать, что A^{α}_{ip} зависит только от относительных радиус-векторов $\mathbf{r}_{ij}$ частиц подсистемы m и, тем самым, не содержит среди своих аргументов $\mathbf{r}_{pq}$. Поскольку задача свелась также к движению в подсистеме n, то можно считать, что A^{α}_{qi} не содержит среди своих аргументов $\mathbf{r}_{pq}$. Тогда, согласно (16), левая часть этого соотношения не может зависеть от $\mathbf{r}_{pq}$, так как от него не зависит правая часть этого соотношения. Следовательно, функция A^{α}_{pq} не должна зависеть от $\mathbf{r}_{pq}$.

Остановимся на этом месте более подробно. Дело в том, что в силу (6) мы можем переписать аргументы функции A^{α}_{pq} через другие аргументы, например, аргумент $\mathbf{r}_{pq}$ через аргументы $\mathbf{r}_{qi}$ и $\mathbf{r}_{ip}$, и тогда, казалось бы, наше рассуждение становится неверным. На самом деле это не так. Рассмотрим для простоты зависимость только от аргумента $\mathbf{r}_{pq}$, для остальных аргументов можно провести аналогичное рассмотрение. Действительно, в этом случае A^{α}_{pq} должно зависеть от суммы аргументов $\mathbf{r}_{qi}$ и $\mathbf{r}_{ip}$, но тогда из (16) следует, что в этом случае либо $A^{\alpha}_{ip} = A^{\alpha}_{qi}$ и они обе должны зависеть от суммы этих аргументов, либо $A^{\alpha}_{ip} \neq A^{\alpha}_{qi}$, но тогда A^{α}_{pq} не будет зависеть от суммы этих же самых аргументов. Поскольку задача о движении N частиц свелась к задачам о движении частиц в подсистемах меньшего числа частиц, в число которых входят подсистемы m и n, то среди аргументов функции A^{α}_{ip} не должно содержаться аргументов $\mathbf{r}_{qi}$, а среди аргументов функции A^{α}_{qi} не должно содержаться аргументов $\mathbf{r}_{ip}$, т.е. эти функции никак уже не могут зависеть от суммы аргументов $\mathbf{r}_{qi}$ и $\mathbf{r}_{ip}$ и так далее. Итак, мы приходим к прежнему выводу о том, что A^{α}_{pq} не должны зависеть от $\mathbf{r}_{pq}$.

Рассмотрим соотношение, аналогичное соотношению (15), но в котором в левой части в числителе или в знаменателе фигурирует r^{x}_{pq}. Тогда мы придем к противоречию, поскольку правая часть нового соотношения, как мы только что доказали, не будет зависеть от $\mathbf{r}_{pq}$.

Это означает, что (6) и (5б) не являются линейно независимыми. Итак, должно быть $A^{\alpha}_{pq} = A^{\alpha}_{ip} = A^{\alpha}_{qi}$. Но, как мы уже отмечали, аргументы функции A^{α}_{qi} могут содержать только такие аргументы $\mathbf{r}_{iu}$ для частиц u из подсистемы m, которые входят также в подсистему n. Аналогично, аргументы функции A^{α}_{ip} могут содержать только такие аргументы $\mathbf{r}_{iw}$ для частиц w из подсистемы n, которые входят также в подсистему m, т.е. аргументами A^{α}_{ip} могут быть только $\mathbf{r}_{ts}$, где t и s – частицы, содержащиеся как в подсистеме m, так и в подсистеме n. Но тогда мы пришли к противоречию, поскольку согласно (13) (импульс $\mathbf{p}_{ip}$ зависит только от относительных радиус-векторов частиц, входящих одновременно в обе подсистемы m и n) движение в системе m свелось к движению в меньшей подсистеме.

Замечание. Если отойти от условия, что движение N частиц должно сводиться к движениям в подсистемах с $m > 2$ и допустить, что некоторые из m могут равняться 2, то может не найтись таких трех частиц i, p, q, что частицы i, p принадлежат некоторой подсистеме с $m > 2$, а q принадлежит некоторой подсистеме с $n > 2$ и не принадлежит подсистеме m, что лежало в основе нашего рассмотрения. Но если это так, то для любых частиц i, p, принадлежащих некоторой подсистеме с $m > 2$, все движения частиц i, q и p, q, где частица q не принадлежит подсистеме m, должны быть двухчастичными. Тогда мы придем к тому, что A^{α}_{ip}, A^{α}_{qi} и A^{α}_{pq} не должны зависеть ни от каких аргументов $\mathbf{r}_{ts}$, где t и s – произвольные частицы, т.е. движение частиц i, p должно быть двухчастичным, а это противоречит тому, что они принадлежат подсистеме с $m > 2$.

Остается случай, когда задача о движении N частиц сводится к задачам о движении двух частиц, который подробно рассмотрен в [8]. Таким образом, доказана **Теорема**. *При наличии полного интеграла, задача о движении N частиц с парными взаимодействиями в системе сводится к задачам движения $m < N$ частиц в относительных координатах $\mathbf{r}_{ij}$ тогда и только тогда, когда она сводится к двухчастичным задачам в этих же координатах, т.е. когда для любой трехчастичной подсистемы частиц ijk исходной системы N частиц тождественно выполняется соотношение*

$$\frac{1}{\mu_{ij}}\frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}} + \frac{1}{\mu_{jk}}\frac{\partial U(\mathbf{r}_{jk})}{\partial \mathbf{r}_{jk}} + \frac{1}{\mu_{ki}}\frac{\partial U(\mathbf{r}_{ki})}{\partial \mathbf{r}_{ki}} \equiv 0.$$

Если система с парными взаимодействиями частиц между собой обладает полным интегралом и не разбивается на совокупность не взаимодействующих друг с другом подсистем, то движение N частиц этой системы не приводится к движению меньшего числа частиц в относительных координатах. Единственным исключением является случай, когда движения частиц могут свестись к двухчастичным движениям.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] А. Пуанкаре, *Новые методы небесной механики. Избранные труды.* т. 1, (М., Наука, 1971); т. 2, (М., Наука, 1972).

[2] Е. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика* (М., Л., ОНТИ, 1937).

[3] А. И. Лурье, *Аналитическая механика* (М., Физматгиз, 1961).

[4] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики* (М., УРСС, 2002).

[5] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем* (Москва, Ижевск: "Институт компьютерных исследований", 2003).

[6] А. Г. Рейман, М. А. Семенов–тян–Шанский, *Интегрируемые системы* (Москва, Ижевск; "Институт компьютерных исследований", 2003).

[7] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация* (издательский дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999).

[8] А. М. Бойченко, Физическая мысль России, N 1, 33 (2001).

[9] А. М. Бойченко, Препринт ИОФАН N 5 (ИОФАН, Москва, 1997).

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 7 апреля 2008 г.