УДК 530.12;531.51

УТОЧНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ДЕЙСТВИЯ ГИББОНСА–ХОКИНГА

Р. Ф. Полищук

Сравниваются гравитационные действия Гильберта, Эйнштейна и действие Гиббонса–Хокинга с поверхностным членом. Принцип эквивалентности рассматривается как аргумент в пользу и выбора вида физического вакуума, и выбора действия без вторых производных тетрадного потенциала, совпадающего с действием Гильберта при слабой лоренцевой калибровке тетрады: козамкнутость одной 1-формы общего растяжения тетрады. Действие Гиббонса–Хокинга освобождено от искусственно введенного ими слагаемого, ограничивающего его применимость в общем случае.

В общей теории относительности действие обычно берется в виде

$$I = (16\pi G)^{-1} \int d^4x(-g)^{-1/2}(R - 2\Lambda) + \int d^4x(-g)^{-1/2} L_m, \qquad (1)$$

где R – скалярная кривизна Риччи четырехмерного многообразия точек-событий (пространства-времени), Λ – космологическая постоянная, g – детерминант 4-метрики, L_m – плотность лагранжиана материальных источников, G – ньютонова гравитационная постоянная. Опуская множитель перед интегралом, космологическую постоянную и лагранжиан материальных полей, запишем действие в кратком виде $\int *R$. Здесь звезда $(*)$ означает оператор дуального сопряжения Ходжа (для p-формы a на n-многообразии он дает $(n\text{-}p)$-форму $*a$). Например, для единицы (постоянной скалярной функции, 0-формы на пространстве-времени) получаем 4-форму объема области M многообразия:

$$*1 = (-g)^{-1/2} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (-g)^{-1/2} d^4x, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M *1.$$

Скалярная кривизна выражается через метрику, символы Кристоффеля Γ и тетраду (четверку ортонормированных 1-форм $e_{a\mu}dx^\mu = e_a$) следующим образом ($\mu = 0, i$; a – лоренцев индекс):

$$R = g^{\mu\nu}(\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}) + \frac{\partial_\mu}{\sqrt{-g}}\frac{\partial_\nu}{\sqrt{-g}}gg^{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$R = -(\nabla_\mu e_{a\nu})(\nabla^\nu e^{a\mu}) + K^\mu K_\mu + 2\nabla^\mu K_\mu, \tag{4}$$

$$K_\mu = -e^a_\mu \nabla^\nu e_{a\nu} = e^a_\mu K_a.$$

Скалярная кривизна (лагранжиан Гильберта) не содержит вторых производных, если

$$\partial_\mu(gg^{\mu\nu}) = 0 \,\text{или}\, K_\mu = 0 \,(K_a = 0). \tag{5}$$

Эти четверки условий можно ослабить требованием выполнения одного условия:

$$\partial_\mu[(-g)^{-1/2}\partial_\nu(gg^{\mu\nu})] = 0 \,\text{или}\, \nabla^\mu K_\mu = 0. \tag{6}$$

Первое условие (5) означает равенство нулю векторного поля $\partial_{(\nu)}(gg^{(\nu)\mu})\partial_\mu$, где один координатный индекс (в скобках) выключен (но по нему идет суммирование). Оно эквивалентно выбору конформно-гармонических координат (гармонических для метрики $(-g)^{-1/2}g_{\mu\nu}$, конформной исходной метрике $g_{\mu\nu}$). Выключение мирового индекса означает, в частности, фиксацию на пространстве-времени дополнительной структуры – уровней четырех скалярных функций $x^{(\nu)}$ (и векторных линий вдоль $\partial_{(\nu)} = \partial/\partial x^{(\nu)}$, при этом метрика с выключенным индексом превращается в четверку 1-форм или векторных полей), а условие (5) – нормировку отношения 3-объемов уровней к расстоянию между ними в смысле конформной метрики. Второе условие (5) равенства нулю 1-формы растяжения тетрады (ковектора K_μ или четверки скаляров: $K_a = -\nabla^\mu e_{a\mu} = 0$) означает эквиобъемную деформацию 3-объемов вдоль векторных тетрадных линий. В импульсном представлении это означает поперечность импульсов по отношению к ковекторным потенциалам, отсутствие их продольных компонент. В обоих случаях имеем дело с необходимостью фиксировать на многообразии событий дополнительную сверх метрики структуру (голономную неортонормированную тетраду или ортонормированную неголономную тетраду), удовлетворяющую условиям нормировки некоторых 3-форм (3-объемов) $*g^{(\mu)}_\nu dx^\nu$ или $*e_a = *e_{a\mu}dx^\mu$. Более слабые условия (6) означают не равенство форм нулю, но козамкнутость ("сохранение") 1-формы $g^{-1}\partial_{(\nu)}(gg_{\mu}^{(\nu)})dx^{\mu}$ (по выключенным индексам предполагается суммирование) или $K_{\mu}dx^{\mu}$. Напомним, что форма a замкнута, если $da = 0$, точна при $a = db$ (точная форма заведомо замкнута в силу нильпотентности внешнего дифференциала: $dd = 0$). Для кодифференциала δ (ковариантной дивергенции со знаком минус по первому индексу формы) аналогично говорят о козамкнутых и коточных формах. При этом (ниже Δ – это лапласиан, оператор де-Рама, метрически и топологически самосопряженный оператор, который в общей теории относительности обобщает оператор Даламбера, квадрат ковариантной производной ∇^2, но не совпадает с ним) имеем:

$$\delta = *^{-1}d*,$$

$$*^{-1}\, a = (-1)^{p(n-p)}\mathrm{sgn}\ \det g_{\mu\nu} * a, \tag{7}$$

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d,$$

$$dd = \delta\delta = 0.$$

Четверка 1-форм Риччи

$$R_a = e_a^{\mu}R_{\mu\nu}dx^{\nu} = (\Delta + \nabla^2)e_a \tag{8}$$

позволяет записать уравнения Эйнштейна–Гильберта (в естественных единицах)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(\delta L_m/\delta g_{\mu\nu}), \tag{9}$$

в *полутетрадной* форме (один индекс – лоренцев, другой – мировой, координатный):

$$R_a = 8\pi G\Big(T_a - \frac{1}{2}Te_a\Big) + \Lambda e_a, \tag{10}$$

$$R_a = R_{a\mu}dx^{\mu},$$

$$e_a = e_{a\mu}dx^{\mu}.$$

Риччиева кривизна R_a описывает деформацию 3-объемов $*e_a$ вдоль интегральных e_a-линий, скалярная кривизна $R = e^{a\mu}R_{a\mu}$ как ее след описывает сумму деформаций по этим четырем мировым 1-направлениям $e_a^{\mu}\partial_{\mu}$ (лоренцевы индексы перемещаются постоянной диагональной метрикой $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$:

$$R = -(\nabla e_a)(\nabla e^a)^T + K_aK^a - 2\delta K = L_g - 2\delta K,$$

$$K = K_\mu dx^\mu,$$
$$\delta K = -\nabla^\mu K_\mu, \tag{11}$$
$$*R = -*(\nabla e_a)(\nabla e^a)^T + *K_a K^a - 2d*K.$$

Для 4-области M с границей ∂M для действия Гильберта получаем выражение:

$$I_H = (16\pi G)^{-1}\int_M *R = (16\pi G)^{-1}\int_M *L_g - (8\pi G)^{-1}\int_{\partial M} *K. \tag{12}$$

Уравнения Эйнштейна–Гильберта можно получить с помощью тетрадного гравитационного лагранжиана и лагранжиана Эйнштейна, не содержащих вторых производных:

$$L_g = -(\nabla_\mu e_{a\nu})(\nabla^\nu e^{a\mu}) + K_\mu K^\mu = R - 2\nabla^\mu K_\mu,$$
$$L_E = g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}) = R - \frac{\partial_\mu}{\sqrt{-g}}\frac{\partial_\nu}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu}. \tag{13}$$

Поскольку уравнения тяготения – дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, для их вывода желателен формализм первого порядка, отвечающий лагранжиану без вторых производных. Но дело в том, что соответствующие лагранжианы (13) теряют (первый) лоренцеву симметрию либо (второй) свойство независимости от выбора координат (можно даже обратить эти лагранжианы в нуль соответствующими калибровочными условиями). Эта проблема и является здесь предметом анализа.

В сентябре 1976 года Г. Гиббонс, выступая в астрономическом институте ГАИШ при МГУ, сказал, что им с С. Хокингом "надоело возиться со вторыми производными гравитационного лагранжиана" (частное сообщение), и они дополнили гравитационный лагранжиан Гильберта поверхностным членом [1, 2]. Это более правильный подход, чем подход традиционный, представленный, в частности, Ландау и Лифшицем [3]. Приведем соответствующую аргументацию Хокинга [2].

Скалярная кривизна содержит члены, линейные по вторым производным метрики. Интегрированием по частям вариация этих членов может быть превращена в интеграл по границе, который содержит нормальные производные вариации метрики на границе. Чтобы устранить этот недостаток и получить действие, стационарное для решений уравнений Эйнштейна при всех вариациях метрики, исчезающих на границе, нужно добавить член вида

$$(8\pi G)^{-1}\int K(\pm h)^{1/2} d^3x + C, \tag{14}$$

где K – след второй фундаментальной формы границы, h – индуцированная на границе метрика; знаки плюс или минус выбираются в зависимости от того, пространственноподобна или временноподобна граница, а C – член, который зависит только от метрики на границе. Необходимость добавления к действию поверхностного члена можно увидеть, рассмотрев ситуацию, где рассматривается переход от метрики h_1 на поверхности S_1, отвечающей координатному времени $t = t_1$, к метрике h_2 на поверхности S_2, отвечающей более позднему времени $t = t_2$, и затем к метрике h_3 на еще более поздней поверхности S_3. Потребуем, чтобы амплитуда перехода от начального состояния к конечному получалась суммированием всех состояний по промежуточной поверхности S_2:

$$\langle h_3, S_3 | h_1, S_1 \rangle = \sum_{h_1} \langle h_2, S_2 | h_1, S_1, \rangle \langle h_3, S_3 | h_2, S_2 \rangle. \tag{15}$$

Это справедливо, если и только если

$$I[g_1 + g_2] = I[g_1] + I[g_2], \tag{16}$$

где g_1 – метрика между S_1 и S_2, g_2 – метрика между S_2 и S_3, а $[g_1 + g_2]$ – метрика в областях между S_1 и S_3, полученных соединением двух прежних областей. Поскольку нормальная производная g_1 на S_2, вообще говоря, не совпадает с нормальной производной g_2 на S_2, метрика $[g_1 + g_2]$ будет иметь в тензоре Риччи дельта-функцию с множителем $2(K^1_{\mu\nu} - K^2_{\mu\nu})$, где $K^1_{\mu\nu}$ и $K^2_{\mu\nu}$ – вторые фундаментальные формы поверхности при метриках g_1 и g_2, соответственно; они определены по отношению к нормали, направленной в будущее. Это означает, что соотношение (16) справедливо, если и только если действие является суммой (1) и (14):

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)(-g)^{1/2} d^4x + \int L_m (-g)^{-1/2} d^4x + \frac{1}{8\pi G}\int K(\pm h)^{1/2} d^3x + C. \tag{17}$$

Появление члена C в выражении для действия довольно неприятно, пишет Хокинг. Его можно было бы включить в перенормировку меры в функциональном интеграле. Но в случае асимптотически-плоской метрики естественно взять этот член в таком виде, чтобы вклад от временноподобной трубки при больших радиусах был равен нулю, когда метрика совпадает с метрикой плоского пространства: $g = \eta$. Тогда

$$C = -(8\pi G)^{-1} \int K^0 (\pm h)^{1/2} d^3x, \tag{18}$$

где K^0 – вторая фундаментальная форма границы, вложенной в плоское пространство. Это не вполне удовлетворительно, отмечает далее Хокинг, так как, вообще говоря, метрика границы не может быть вложена в плоское пространство. Однако в случае асимптотически-плоской ситуации можно предположить, что граница становится асимптотически-вложимой при увеличении радиуса. Далее Хокинг пишет [2]: “Я подозреваю, что в конечном счете следует отбросить все граничные поверхности и иметь дело только с замкнутыми временно-подобными многообразиями. Однако при нынешнем уровне развития теории очень удобно использовать некомпактные асимптотически-плоские метрики и вычислять действие, используя границу при большом радиусе”.

Мы подробно изложили мотивировку изменения гравитационного действия Гиббонсом и Хокингом, чтобы показать сочетание правильности направления их мысли в данном важном вопросе с неудовлетворительностью способа решения недооцененной другими физиками проблемы: ведь действие Гиббонса–Хокинга, по сути, корректно определено только для асимптотически-плоских метрик. Дело, очевидно, в том, что Гиббонс и Хокинг даже не допускают мысли использовать калибровочно-неинвариантный лагранжиан. Действительно, даже само название “общая теория относительности” говорит о попытке Эйнштейна обобщить принцип эквивалентности инерциальных систем отсчета до эквивалентности ускоренных систем отсчета. Об этом говорит и принцип эквивалентности Эйнштейна: *гравитация и инерция эквивалентны.*

Это означает, что в центре масс искусственного спутника Земли гравитационное поле можно считать отсутствующим (в частности, плотность гравитационной энергии в этой точке естественно считать равной нулю). С другой стороны, в плоском, но ускоренном, мире Риндлера (мы имеем в виду правый, геодезически неполный клин Риндлера) можно считать, что нет сил инерции, но есть нетривиальное поле тяготения с ненулевой плотностью гравитационной энергии (пропорциональной, как и в случае ньютоновой гравитации с ее абсолютными ускорениями, квадрату ускорения со знаком минус). Но нетривиальности поля должна отвечать и нетривиальность его действия даже в плоском мире!

Очевидно, тут дело в нетривиальном различии даже плоских физических вакуумов. Если мы в мире Риндлера перейдем в инерциальную систему отсчета, прежняя инерциальная система отсчета прежнего мира Минковского останется ускоренной относительно него (изменится только знак относительного ускорения): на плоском многообразии существует континуум различных плоских метрик, отвечающих различным выборам ускоренных друг относительно друга вакуумов – именно это обстоятельство затрудняет решение проблемы гравитационной энергии и заставляет отождествлять гравитацию не с тензором кривизны, но с формой связности.

Иной точки зрения придерживается Дж. Синг [4]: “Первое, что нам нужно осмыслить – это тензор Римана, поскольку *этот тензор и есть* гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае) – гравитационного поля не существует”. Но увы, мы живем не в классическом, но в квантовом мире, который можно связать с деформацией галилеевой группы симметрии ньютоновского мира с помощью двух параметров деформации – обратной скорости света и постоянной Планка. Если квантовый вакуум мира Минковского инвариантен относительно группы Пуанкаре, то он не инвариантен относительно ускорений: нужны преобразования Боголюбова для перехода от одного вакуума к другому (с его риндлеровыми частицами и с тепловой функцией Грина). Даже в калибровочно-инвариантной теории Янга–Миллса приходится вводить *духи Фаддеева–Попова* как вспомогательные поля, позволяющие записать производящий функционал функций Грина в виде функционального интеграла от локального эффективного действия.

Тот факт, что вакуум “чувствует” ускорения, и заставляет нас строго отождествить гравитационное поле не с тензором Римана, как это делает Синг, не признающий принципа эквивалентности, но с неоднородно преобразующейся инвариантной формой связности главного расслоения пространства-времени. Хотя здесь приходится обобщить понятие инварианта (на неоднородно преобразующиеся геометрические объекты: в общей теории относительности важна только возможность однозначно вычислять их при любой замене локальных координат), определение гравитации через связность (а не просто через метрику или риманову кривизну) вполне соответствует пониманию гравитации как калибровочного поля (ведь всякое калибровочное поле и есть некоторая связность).

В. А. Фок справедливо отрицал равноправие всех систем отсчета [5]: для Солнечной системы, например, преимущественна барицентрическая система (поскольку именно Солнце дает основной вклад в кривизну пространства-времени около него, барицентрическая система отсчета почти сопутствует Солнцу, так что прав не Птолемей, но Коперник). Прогибающая пространство-время среда сама является преимущественной системой отсчета (определяя риччи-каноническую тетраду собственных векторов тензора Риччи). То же можно сказать и о системе отсчета, сопутствующей свободной части гравитационного поля (вейль-каноническая тетрада, пары векторов которой задают 2-направления экстремального значения конформной кривизны). Даже сумма всех 4-импульсов реликтовых фотонов Метагалактики (после их параллельных переносов в разные мировые точки при условии геодезической выпуклости пространства) задает преимущественную систему отсчета для описания ее фотонного газа.

Не только эти соображения, но и необходимость описывать спинорные поля в искривленном пространстве-времени заставляют разделить понятия системы координат и системы отсчета (и Эйнштейн, и многие математики их отождествляют). Систему отсчета (тетрадное поле) следует понимать как дополнительную (кроме 4-метрики) инвариантную структуру, которую необходимо задавать на пространстве-времени. Именно эта структура фиксирует физически значимый выбор вакуума физической системы. Если для классической (не квантовой) общей теории относительности как релятивистской теории гравитации выбор лоренц-инвариантного действия Гильберта кажется предпочтительным, то уже для квантовой электродинамики нужна лоренцева калибровка вектор-потенциала электромагнитного поля, означающая отсутствие его нефизических продольных компонент.

Мы считаем, что квантовая теория гравитации потребует аналогичного ограничения для выбора гравитационного потенциала. Гиббонс и Хокинг остановились здесь на полпути, невольно маскируя фактический свой переход к гравитационному лагранжиану без вторых производных, то есть к лагранжиану, зависящему от калибровки тетрады. В результате им пришлось иметь дело с "неприятным членом действия C", от которого им не удалось нормально избавиться. Но выбор действия в виде $\int *L_g$ автоматически освобождает нас от "неприятного члена действия" и восстанавливает его аддитивность при произвольном увеличении области варьирования. Цена, которую здесь не решились заплатить Гиббонс и Хокинг – отказ от полной лоренцевой инвариантности действия (ведь поверхностный член действия по формуле Стокса эквивалентен некоторому объемному члену). Одно ограничение на свободный выбор шести параметров лоренцева вращения тетрады (гравитационного потенциала) говорит просто о том, что в вариационных задачах с границами следует учитывать изменение рассматриваемого объема при эволюции физической системы, а точнее говоря – вклад границы 4-объема.

Строго говоря, включение Гиббонсом и Хокингом в гравитационное действие не только одного, но и второго, "неприятного", поверхностного члена, делает их определение не вполне корректным в общем случае. Смысл данной работы – оправдание устранения этого искусственно вводимого дополнительного поверхностного члена, который на самом деле только портит ситуацию. Признание универсальной лоренц-инвариантности гравитационного действия равнозначно обязательному требованию учета в этом действии вклада границы, если эта граница не пуста (по сути – учета выбора физического вакуума, "чувствующего" наличие границ, как о том говорит и эффект Казимира).

Здесь мы просто постарались более естественно реализовать правильную идею Гиббонса и Хокинга, упростив их определение гравитационного действия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. V. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D15**, 2752 (1977).
[2] S. W. Hawking, *General Relativity* (Cambridge University Press, 1979).
[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).
[4] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (Amsterdam, 1960).
[5] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения* (М., 1961).

Поступила в редакцию 19 мая 2008 г.