УДК 533.951

СТАБИЛИЗИРУЕТ ЛИ СЖИМАЕМОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ РАЗРЫВ?

И. А. Жвания, В. Г. Кирцхалия, А. А. Рухадзе

Показано, что учет сжимаемости жидкости не стабилизирует неустойчивость тангенциального разрыва, как это следует из критерия Ландау. Критерий Ландау выходит за рамки применимости полученного им дисперсионного уравнения.

Л. Д. Ландау в 1944 году рассмотрел задачу об устойчивости тангенциального разрыва в потоке жидкости со скачком скорости течения. В пределе несжимаемой жидкости (см. [1], §29) разрыв всегда неустойчив, в то время как при учете сжимаемости жидкости (см. [1], §84, задача 1) неустойчивость стабилизируется при условии[1]

$$v^2 > 8c^2, \tag{1}$$

где v – относительная скорость в тангенциальном разрыве, а c – скорость звука в жидкости. Это условие было получено путем решения дисперсионного уравнения для малых возмущений поверхностного типа, затухающих в направлении, нормальном к поверхности разрыва

$$\frac{\chi_1}{(\omega - kv)^2} = -\frac{\chi_2}{\omega^2}. \tag{2}$$

Здесь ω – частота, k – компонента волнового вектора возмущений, распространяющихся вдоль поверхности разрыва, а χ_1 и χ_2 характеризуют затухание возмущений в направлении, нормальном к поверхности разрыва, т.е.

[1] Формула (1) относится к случаю распространения возмущений вдоль разрыва. Для возмущений, распространяющихся под углом ϑ в (1) следует заменить $v \to v\cos\vartheta$.

$$\delta\rho \sim \begin{cases} e^{i\chi_1 z} & \text{при } z > 0, \\ e^{i\chi_2 z} & \text{при } z < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что $\chi_{1,2}$ должны удовлетворять условиям

$$Im\chi_1 = Im\sqrt{\frac{(\omega - kv)^2}{c^2} - k^2} > 0,$$

$$Im\chi_2 = Im\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} > 0. \tag{4}$$

Решения дисперсионного уравнения (2), удовлетворяющие условиям (4), записываются в виде[2]

$$\omega = \frac{k}{2}\left\{v \pm i\sqrt{4c\sqrt{c^2 + v^2} - v^2 - 4c^2}\right\}. \tag{5}$$

При малых скоростях, $v \ll c$, из уравнения (2) получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн в потоке жидкости с тангенциальным разрывом

$$\frac{1}{(\omega - kv)^2} = -\frac{1}{\omega^2}, \tag{6}$$

которое имеет решения

$$\omega = \frac{kv}{2}(1 \pm i), \tag{7}$$

одно из которых соответствует неустойчивым колебаниям. Легко видеть, что при $v \ll c$ решения (5) переходят в (7).

Вместе с тем, с ростом скачка скорости v инкремент нарастания неустойчивости, $Im\omega$, согласно (5), растет, достигая максимума при $v_m^2 = 3c^2$, равного

$$Im\omega_{max} = \frac{kc}{2}. \tag{8}$$

При дальнейшем росте скорости v инкремент неустойчивости падает и при выполнении критерия Ландау (1) неустойчивость пропадает. Именно этот вывод, сделанный

---

[2] В (5) отброшено решение со знаком "+" в фигурных скобках перед радикалом (см. формулу (6) задачи 1 в [1]), как явно противоречащее уравнению (2). Оно приведено у Ландау и является следствием появления новых корней при решении уравнения (2) путем возведения в квадрат.

на основе анализа решений (5), является неверным. Дело в том, что при таких скоростях уравнение (2) теряет смысл. Точнее, его решения (5) не удовлетворяют условиям поверхностности волн (4). На это обстоятельство впервые было обращено внимание в работе [2], которая, однако, прошла незамеченной.

Согласно условиям (4) решения (5) справедливы при

$$Im\chi_{1,2} = Im\sqrt{\frac{k^2v^2}{2c^2} - \frac{k^2}{c}\sqrt{c^2+v^2} \pm \frac{ik^2v}{c^2}\sqrt{4c\sqrt{c^2+v^2} - v^2 - 4c^2}} > 0. \tag{9}$$

Легко показать, что эти неравенства выполняются, если

$$k^2v^2 - 2k^2c\sqrt{c^2+v^2} < 0, \tag{10}$$

или

$$0 < v^2 < (2+\sqrt{8})c^2 \simeq 4.85c^2. \tag{10a}$$

На верхней границе области (10) инкремент развития неустойчивости отличен от нуля и равен

$$Im\omega_{nop} \simeq 0.4kc, \tag{11}$$

что несколько ниже, чем в (8).

В заключение отметим, что при скоростях, превышающих верхнюю границу (10), уравнение (2) не имеет решений поверхностного типа, т.е. теряет смысл само это уравнение; оно неадекватно описывает устойчивость тангенциального разрыва. Для корректного решения задачи необходимо рассмотреть задачу, ограниченную в направлении, поперечном к разрыву, либо задачу с излучением звука с поверхности разрыва. Но это уже предмет отдельной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, М., Наука, 1988 г.

[2] Kirtskhalia V. Planet Space Sci., **42**, N 6, 513 (1994).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 1 ноября 2002 г.