

УДК 535.326, 537.632

ГРАНИЦЫ ЗАПРЕЩЕННЫХ ЗОН ОДНОМЕРНОГО МАГНИТОФОТОННОГО КРИСТАЛЛА В КОНФИГУРАЦИИ ПОЛЯРНОГО ЭФФЕКТА КЕРРА

Н. Ф. Кубраков

В сообщении рассмотрены условия однозначного определения границ запрещенных зон идеального одномерного магнитофотонного кристалла в конфигурации полярного эффекта Керра при нормальном падении плоской монохроматической волны. Следствием их выполнения является тождественное обращение в единицу коэффициентов отражения волн с правой и левой круговыми поляризациями. В частном случае найдены аналитические выражения для границ. Показаны особенности эффекта Керра для частот, совпадающих с центрами запрещенных зон.

Ключевые слова: магнитофотонные кристаллы, запрещённая зона.

Одномерный магнитофотонный кристалл представляет собой диэлектрический мультислой на подложке, в котором между некоторыми слоями (дефектами) периодическую структуру образуют два слоя (период) [1–3]. Если дефект или один из слоев периода обладает магнитными свойствами, то при взаимодействии монохроматического поляризованного света с фотонным кристаллом наблюдаются магнитооптические эффекты [4]. Их значительное усиление возможно за счет явления локализации света в области дефектов, когда его частота попадает в запрещенную фотонную зону, что реализуется при определенном сочетании параметров фотонного кристалла. Естественно возникает задача однозначного определения границ запрещенных зон и ее наиболее простое решение получается в случае идеального магнитофотонного кристалла (без дефектов) в конфигурации полярного эффекта Керра при нормальном падении плоской монохроматической волны (рис. 1).

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия; e-mail: kubrakov@orc.ru

Рассматриваемый магнитофотонный кристалл состоит из N периодов на полубесконечной подложке с коэффициентом преломления n_s . Его оптические свойства сильно зависят от положения слоев в периоде. В данном случае магнитный слой толщиной h_1 является первым и характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{ij}(\mathbf{m}) = \delta_{ij} + \chi_{ij}(\mathbf{m})$, в матричной форме

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} n_1^2 & \chi_{12} & 0 \\ -\chi_{12} & n_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{1e}^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $n_1^2 = 1 + \chi_{11}(\mathbf{m})$, $n_{1e}^2 = 1 + \chi_{33}(\mathbf{m})$ – коэффициенты преломления ($\text{Im}n_1, \text{Im}n_{1e} > 0$), единичный вектор \mathbf{m} направления намагниченности ориентирован внешним магнитным полем \mathbf{H}_0 вдоль оси X_3 (рис. 1). Вид тензора восприимчивости определен только из симметрии – его инвариантности относительно точечной магнитной группы $4mm$, которая выявляет следующие свойства: $\chi_{11}(\mathbf{m}) = \chi_{11}(-\mathbf{m})$, $\chi_{12}(\mathbf{m}) = -\chi_{12}(-\mathbf{m})$ [5]. Второй слой периода толщиной h_2 имеет коэффициент преломления n_2 . Предполагается, что $\text{Re}n_1 > \text{Re}n_2$. Падающая волна $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0^{(i)} \exp(i(k_0 n_0 x_3 - \omega t))$ и отраженная $\mathbf{E}^{(r)} = \mathbf{E}_0^{(r)} \exp(-i(k_0 n_0 x_3 + \omega t))$, где $k_0 = \omega c^{-1}$ – волновое число, распространяются в прозрачной среде с коэффициентом преломления n_0 , не зависящим от ω . Каждая из них может иметь эллиптическую поляризацию (рис. 2). Углу эллиптичности $\eta \in [-\pi/4, \pi/4]$ приписывается знак. Левая поляризация (эллиптическая или круговая) соответствует вращению вектора поля *против* часовой стрелки при наблюдении *против* оси X_3 (рис. 1, 2). В этом случае $\eta > 0$. Отрицательный знак η говорит о правой поляризации.

Из волнового уравнения для области магнитного слоя

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} + k_0^2 \begin{bmatrix} n_1^2 & \chi_{12} \\ -\chi_{12} & n_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = 0$$

следует, что в нем, также как и во всем пространстве (рис. 1), независимо распространяются две моды E_L и E_R – волны с левой ($\eta = \pi/4$) и правой ($\eta = -\pi/4$) круговой поляризацией. Существует шестнадцать вариантов представления эллиптически поляризованной волны через эти моды и одно из них есть:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_L \\ E_R \end{bmatrix}.$$

Поляризация падающей волны, *при условии* $\theta^{(i)} = 0$, и отраженной волны, как следует

из выражения для вектора Джонса [6], определяется параметрами

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \frac{E_L^{(i)}}{E_R^{(i)}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\eta^{(i)}}{1 - \operatorname{tg}\eta^{(i)}}, \quad \tilde{\chi}^{(r)} = \frac{E_L^{(r)}}{E_R^{(r)}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\eta^{(r)}}{1 - \operatorname{tg}\eta^{(r)}} \exp(-2i\theta^{(r)}) = \frac{r_L}{r_R} \tilde{\chi}^{(i)},$$

где r_L и r_R – элементы диагональной матрицы отражения волн E_L и E_R . Для падающей волны с левой эллиптической поляризацией $\tilde{\chi}^{(i)} \in (1, +\infty)$, а в случае правой $\tilde{\chi}^{(i)} \in (0, 1)$. Эффект Керра характеризуется углами

$$\theta_K = -\frac{1}{2} \operatorname{artg} \tilde{\chi}^{(r)}, \quad \eta_K = \operatorname{arctg} \frac{|\tilde{\chi}^{(r)}| - 1}{|\tilde{\chi}^{(r)}| + 1} \quad (2)$$

и коэффициентом отражения

$$R = \frac{1}{2} [|r_L|^2 + |r_R|^2 + (|r_L|^2 - |r_R|^2) \sin 2\eta^{(i)}]. \quad (3)$$

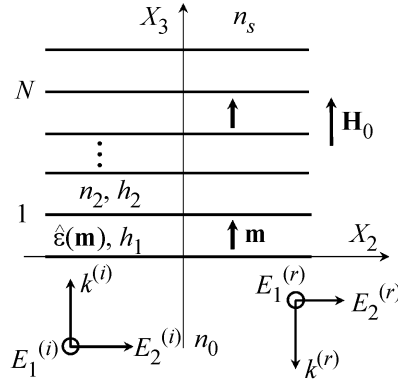


Рис. 1: Конфигурация магнитофотонного кристалла и выбор направлений векторных величин при рассмотрении полярного эффекта Керра (пояснения в тексте).

Признаком существования запрещенных зон любого фотонного кристалла могло бы быть идеальное отражение световой волны, но из-за поглощения оно невозможно. Для реальных зон коэффициент отражения может быть сколь угодно близким к единице, но *тождественно* в единицу никогда не обращается. Это и является причиной неоднозначности определения границ запрещенных зон. Для их однозначного (точного) определения необходимо предположить, что

$$\operatorname{Im}n_1, \operatorname{Im}n_2, \operatorname{Re}\chi_{12} = 0, \quad N = \infty. \quad (4)$$

Другими словами, однозначное определение запрещенных фотонных зон из уравнения $R = 1$ допускает только *абсолютно прозрачный полубесконечный периодический мультислой*. Уравнения $|r_L|^2 = 1$ и $|r_R|^2 = 1$ выявляют два множества запрещенных зон Ξ_L

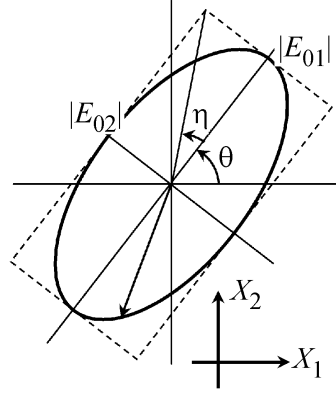


Рис. 2: Определение параметров θ и η , характеризующих поляризацию плоских волн.

и Ξ_R , соответственно, для волн с левой и правой круговой поляризацией. Пересечение этих множеств ($\Xi_L \cap \Xi_R$) представляет собой *полные* запрещенные зоны, для которых $R \equiv 1$.

Таким образом, необходимо найти r_L и r_R . Для этого автором получено выражение

$$r = \frac{(p_{11} + p_{12}n_s)n_0 - p_{21} - p_{22}n_s - (n_0 - n_s)\rho_N(p_{11} + p_{22})}{(p_{11} + p_{12}n_s)n_0 + p_{21} + p_{22}n_s - (n_0 + n_s)\rho_N(p_{11} + p_{22})}, \quad (5)$$

в которое входят элементы характеристической матрицы периода $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{M}}_1 \hat{\mathbf{M}}_2$. Формула (5), фактически, представляет собой частный случай коэффициента r_{ss} в матрице отражения мультислоя при нормальном падении [7]. Характеристическая матрица каждого слоя имеет один и тот же вид:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \text{ch}\mu & -n^{-1}\text{sh}\mu \\ -n\text{sh}\mu & \text{ch}\mu \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Элементы $\hat{\mathbf{M}}_1$: $\mu = ik_0 n h_1$, $n = n_L = (n_1^2 + i\chi_{12})^{1/2}$ и $n = n_R = (n_1^2 - i\chi_{12})^{1/2}$, соответственно, для r_L и r_R . Элементы $\hat{\mathbf{M}}_2$: $\mu = ik_0 n_2 h_2$, $n = n_2$. В (5) также входит $\rho_N(z) = U_{N-2}(z)/U_{N-1}(z)$, где $U_N(z) = 2^{-N-1}(z^2 - 4)^{-1/2}[(z + (z^2 - 4)^{1/2})^{N+1} - (z - (z^2 - 4)^{1/2})^{N+1}]$, $U_N(z/2)$ – полином Чебышева второго рода с комплексным аргументом [8]. Вычисление $\rho_N(z)$ выполняется по простой рекуррентной формуле: $\rho_{m+1}(z) = 1/(z - \rho_m(z))$, $\rho_1(z) = 0$, $m = 1, 2, \dots, N - 1$. При выводе выражения (5) предполагалось, что параметры магнитофотонного кристалла $(n_1, \chi_{12}, n_2, n_s)$, относящиеся к частоте ω , могут быть комплексными. Если *предположить* (всего лишь формально), что нет частотной дисперсии этих параметров, то спектральная зависимость R будет связана, согласно (6), только с волновым числом, которое удобно нормировать следующим образом:

$$k_0 = \xi \tilde{k}_0, \quad (7)$$

где $\xi = \omega\tilde{\omega}^{-1}$, $\tilde{k}_0 = 2\pi(h_1 + h_2)^{-1}$, $\tilde{\omega} = c\tilde{k}_0 = 2\pi c(h_1 + h_2)^{-1}$. Запрещенные зоны будут теперь представляться через нормированную частоту ξ . Исходя из (4) и (5), учитывая свойства матрицы $\hat{\mathbf{P}}$ и поведение $\rho_N(z)$ при $N \rightarrow \infty$, можно доказать, что Ξ_L и Ξ_R “появляются” из неравенства $|p_{11} + p_{22}| \geq 2$, в котором диагональные элементы $\hat{\mathbf{P}}$ содержат соответственно n_L и n_R . Это неравенство выявляет *нечетные* и *четные* запрещенные зоны в порядке их следования с возрастанием ξ от нуля. Их границы определяются, соответственно, из уравнений $p_{11} + p_{22} = -2$, $p_{11} + p_{22} = 2$. Границы четных Ξ_L , согласно (6), определяются из уравнения

$$\cos x - \sigma^2 \cos y = 1 - \sigma^2, \quad (8)$$

где $x = \tilde{k}_0 \xi (n_L h_1 + n_2 h_2)$, $y = \tilde{k}_0 \xi (n_L h_1 - n_2 h_2)$ и $\sigma = \frac{n_L - n_2}{n_L + n_2}$. Уравнение для границ нечетных Ξ_L отличается от (8) только знаком правой части:

$$\cos x - \sigma^2 \cos y = \sigma^2 - 1. \quad (9)$$

Очевидно, в случае Ξ_R необходимо n_L заменить на n_R . Решения уравнений (8) и (9), нелинейных относительно ξ , могут быть найдены численными методами [9].

Если выполняется условие $n_1 h_1 = n_2 h_2$, методом теории возмущений легко найти их аналитические решения. Малым действительным параметром является $i\chi_{12}$. В нулевом порядке теории возмущений, согласно (8), все четные Ξ_L и Ξ_R являются вырожденными. Нижние и верхние границы ($\xi_m^-, \xi_m^+, m = 1, 2, \dots$) нечетных Ξ_{mL} и Ξ_{mR} совпадают ($\Xi_{mL} = \Xi_{mR}$). Решения уравнения (9) для этих границ удобно записать в виде

$$\xi_m^\pm = \xi_m^{(C)} \pm \Delta/2, \quad (10)$$

где $\xi_m^{(C)} = \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$ – центры зон и $\Delta = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ – их ширина. Это известный результат теории одномерных немагнитных фотонных кристаллов [10]. Если λ – фиксированная длина падающей волны в вакууме ($n_0 = 1$), то $k_0 = 2\pi/\lambda$ и соответствующая частота $\xi = (h_1 + h_2)/\lambda$. Попадание ξ в центр запрещенной зоны ($\xi = \xi_m^{(C)}$) происходит при оптической длине $n_1 h_1 = n_2 h_2 = (m - 1/2)\lambda/2$. В первом порядке теории возмущений найдено следующее выражение для границ Ξ_{mL} :

$$\xi_{mL}^\pm(\mathbf{m}) = \xi_m^\pm + \frac{i\chi_{12}(\mathbf{m})}{4n_1^2} \left(\frac{\pm 1}{\pi\sqrt{n_1 n_2}} - \xi_m^\pm \right). \quad (11)$$

Правая часть (11) при замене χ_{12} на $-\chi_{12}$ дает границы Ξ_{mR} . Центры и ширина зон определяются выражениями:

$$\xi_{mL,R}^{(C)}(\mathbf{m}) = \xi_m^{(C)} \left(1 \mp \frac{-i\chi_{12}(\mathbf{m})}{4n_1^2} \right), \quad \Delta_{L,R}(\mathbf{m}) = \Delta \pm \frac{i\chi_{12}(\mathbf{m})}{4n_1^2} \left(\frac{2}{\pi\sqrt{n_1 n_2}} - \Delta \right), \quad (12)$$

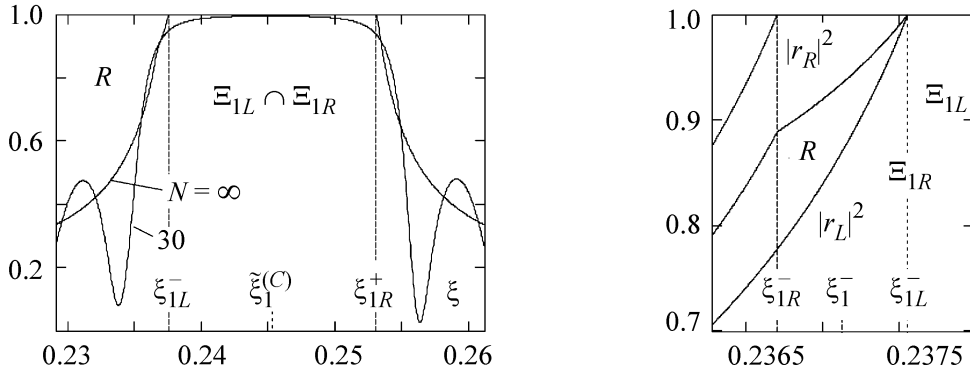


Рис. 3: (а) спектральная зависимость R для конечного ($N = 30$) и бесконечного числа периодов мультислоя, (б) коэффициенты отражения вблизи нижней границы запрещенной зоны $\Xi_{1L} \cap \Xi_{1R}$.

где верхний знак соответствует Ξ_{mL} . При изменении знака χ_{12} , как видно из (5) и (6), коэффициент r_L становится таким, каким был r_R , а r_R – каким r_L . Если полем \mathbf{H}_0 изменить направление вектора \mathbf{m} (рис. 1), то, как следует из симметрии тензора (1), изменится знак χ_{12} . Следовательно, Ξ_{mL} займет область Ξ_{mR} , а Ξ_{mR} область Ξ_{mL} : $\xi_{mL,R}^-(\mathbf{m}) = \xi_{mR,L}^-(-\mathbf{m})$, $\xi_{mL,R}^+(\mathbf{m}) = \xi_{mR,L}^+(-\mathbf{m})$. Очевидно, аналогичным свойством обладают центр и ширина каждой из зон. Необходимо отметить интересный эффект изменения ширины и центров запрещенных зон полем \mathbf{H}_0 : смещение Ξ_{mL} и Ξ_{mR} в разные стороны относительно $\xi_m^{(C)}$ сопровождается изменением Δ_L и Δ_R . Центр $\tilde{\xi}_m^{(C)}$ полной зоны $\Xi_{mL} \cap \Xi_{mR}$ и ее ширина $\tilde{\Delta}_m$ не зависят от \mathbf{H}_0 :

$$\tilde{\xi}_m^{(C)} = \xi_m^{(C)} + \frac{|\chi_{12}|}{8n_1^2} \left(\frac{2}{\pi\sqrt{n_1 n_2}} - \Delta \right), \quad \tilde{\Delta}_m = \Delta - \frac{|\chi_{12}|}{2n_1^2} \xi_m^{(C)}. \quad (13)$$

Если $\xi \in \Xi_{mL} \cap \Xi_{mR}$, то $|r_L| = |r_R| = 1$ и, согласно (2), $\eta_K = 0$. Особенностью эффекта Керра в этом случае является то, что падающая волна с эллиптической поляризацией идеально отражается ($R \equiv 1$) и отраженная волна линейно поляризована ($\eta^{(r)} = 0$). С возрастанием m (с увеличением толщин слоев h_1 и h_2) ширина $\tilde{\Delta}_m$ уменьшается. При

$$m \geq 1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{4n_1^2}{\pi|\chi_{12}|} \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right],$$

где $[\]$ означают целую часть, зоны Ξ_{mL} и Ξ_{mR} не перекрываются и, следовательно, $R < 1$ вблизи $\xi = \xi_m^{(C)}$. Если $\eta^{(i)} = \pi/4$ и $\lambda = (h_1 + h_2)/\xi_{mL}^{(C)}$, то при изменении направления поля \mathbf{H}_0 интенсивность отраженной волны уменьшается.

Т а б л и ц а 1

Зоны Ξ_{mL} и Ξ_{mR} , $\Delta = 0.01603$, исчезновение $\Xi_{mL} \cap \Xi_{mR}$ наступает при $m = 16$

m	\mathbf{H}_0	$\xi_{mL}^{(C)}$	$\xi_{mR}^{(C)}$	Δ_L	Δ_R	$\xi_m^{(C)}$	$\tilde{\xi}_m^{(C)}$	$\tilde{\Delta}_m$
1	↑	0.24541	0.24488	0.01571	0.01635	0.24515	0.24531	0.01550
	↓	0.24488	0.24541	0.01635	0.01571			
3	↑	1.22705	1.22440	0.01571	0.01635	1.22573	1.22589	0.01338
17	↑	8.09854	8.08104			8.08979	—	—

Т а б л и ц а 2

Углы θ_K , η_K (в град.) и коэффициенты отражения для $\xi = \xi_m^{(C)}$, $\eta^{(i)} = 0$ и указанных в тексте параметров структуры

m	N	θ_K	η_K	$ r_L ^2$	$ r_R ^2$	R
1	20	0.934	-0.107	0.954	0.9612	0.9576
	30	0.97	-0.021	0.9937	0.9952	0.9944
	∞	0.975	0	1	1	1
3	20	4.689	-0.111	0.9526	0.96	0.9563
	30	4.878	-0.022	0.9934	0.9949	0.9941
	∞	4.907	0	1		1
17	30	49.592	-0.819	0.8409	0.8904	0.8657
	∞	36.659	-1.447	0.7548	0.8351	0.7949

Свойства запрещенных зон и эффект Керра можно проиллюстрировать на примере магнитофотонного кристалла, состоящего из диэлектриков, прозрачных в ближней инфракрасной области спектра. Необходимые параметры [11]: длина волны $\lambda = 1.15$ мкм; $n_0 = 1$ (воздух); $n_s = 1.52$ (стеклянная подложка); $n_1 = 2.15$, $\chi_{12} = i0.02$, $h_1 = (m - 1/2)\lambda/2n_1$ (слой Вi-содержащего феррит-граната); $n_2 = 1.94$, $h_2 = \lambda/4n_2$ (слой гадолиний-галлиевого граната). Частота $\xi = (h_1 + h_2)/\lambda = \xi_m^{(C)}$ совпадает с центром запрещенной зоны Ξ_{mL} , или ξ_{mR} , найденной в нулевом порядке теории возмущений (при $\chi_{12} = 0$). Для линейной поляризации падающей волны ($\eta^{(i)} = 0$) на рис. 3(а) показаны полная запрещенная зона $\Xi_{1L} \cap \Xi_{1R}$ и спектральные зависимости R , полученные из (3) и (5) при конечном и бесконечном числе периодов. Границы зоны найдены из аналитических выражений (11) и (13). Видно, что только условие (4) обеспечивает однозначное определение запрещенных зон. Спектры $|r_L|^2$, $|r_R|^2$ и R вблизи ξ_{1R}^- и ξ_{1L}^- показаны при $N = \infty$ на рис. 3(б). В табл. 1 приведены значения ширины и центров шести запрещенных зон, которые иллюстрируют эффект их смещения полем \mathbf{H}_0 , положительное

направление которого (\uparrow) показано на рис. 1. Влияние конечного числа N на эффект Керра при $\xi = \xi_m^{(C)}$ можно видеть из таблицы 2.

Замечательное свойство здесь – значительное усиление эффекта (увеличение θ_K при почти неизменяющейся очень малой эллиптичности, почти идеальном отражении и фиксированном значении N) возможно, если “выбрать” запрещенную зону с достаточно большим номером m , т.е. за счет увеличения определенным образом толщин слоев периода.

Необходимо отметить, что метод решения рассмотренной в данном сообщении задачи о границах запрещенных зон и полученные результаты, среди которых наиболее интересными представляются выражения (11)–(13), могут быть применены в исследованиях более сложных проблем, связанных с эффектами Керра и Фарадея в одномерных магнитофотонных кристаллах с дефектами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] M. Ionue, K. Arai, T. Fujii, and M. Abe, *J. Appl. Phys.* **85**, 5768 (1999).
- [2] А. П. Виноградов, С. Г. Ерохин, А. Б. Грановский, М. Инуе, *РЭ* **49**, 96 (2004).
- [3] В. А. Кособукин, *ФТТ* **48**, 2089 (2006).
- [4] А. К. Zvezdin and V. A. Kotov, *Modern Magneto-Optics and Magneto-Optical Materials* (Institute of Physics and Physical Society, Bristol, 1997).
- [5] R. Atkinson and N. F. Kubrakov, *Phys. Rev. B* **66**, 024414 (2002).
- [6] R. V. A. Azzam and N.V. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (North-Holland, Amsterdam, 1997).
- [7] Н. Ф. Кубраков, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, **35**(1), 34 (2008).
- [8] R. Atkinson and N. F. Kubrakov, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **449**, 205 (1995).
- [9] I. Nusinsky and A. A. Hardy, *Phys. Rev. B* **73**, 125104 (2006).
- [10] J. Lekner, *J. Opt A: Pure Appl. Opt.* **2**, 349 (2000).
- [11] I. L. Lubchanskii, N. N. Dadoenkova, M. I. Lubchanskii, et al., *Appl. Phys. Lett.* **85**, 2932 (2004).

Поступила в редакцию 25 ноября 2009 г.