

## СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ВИХРЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ МАГНУСА В СЛАБЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А. К. Звездин<sup>1</sup>, К. А. Звездин<sup>2</sup>

*Исследован вопрос о стационарном движении магнитного вихря в движущейся доменной границе под действием силы Магнуса в слабых ферромагнетиках. Анализируется динамический прогиб доменной границы при наличии в ней движущегося вихря. Получены формулы, описывающие зависимости скорости вихря от скорости доменной границы, в которой он движется.*

**Ключевые слова:** сила Магнуса, гироскопический вектор, магнитный вихрь, слабый ферромагнетизм, фаза Берри, доменная граница, линия Блоха.

1. В работе [1] получено уравнение движения для координаты центра доменной границы  $q(t)$ , содержащей изолированную линию Блоха (магнитный вихрь):

$$\partial_t(m\dot{q}) - \frac{m}{\tau}\dot{q} - \partial_x\sigma\partial_xq = 2M_sH(q) - \frac{2\pi\chi_{\perp}H_D}{\gamma}\dot{x}_0\delta(x-x_0), \quad (1)$$

где предполагается следующая зависимость  $H(q) = H - H'q$ . Второе слагаемое в этой формуле введено для того, чтобы обеспечить устойчивость плоской доменной границы относительно изгибных возмущений, что обычно реализуется в эксперименте [2–4].

Уравнение для координаты центра вихря  $x_0(t)$  будет приведено ниже.

Из (1) следует, в частности, уравнение стационарного движения плоской доменной границы (рис. 1(а)):

$$mv/\tau = 2M_sH \quad (2)$$

или

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = h,$$

---

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия.

<sup>1</sup> E-mail: zvezdin@gmail.ru

<sup>2</sup> E-mail: konstantin.zvezdin@gmail.com

где  $v = V/c$  – относительная скорость,  $h = \mu_0 H/c$ ,  $\mu_0 = 2M_s\tau/m_0$  – подвижность доменной границы при  $H \rightarrow 0$  ( $\mu_0 \sim 10^4$  см<sup>2</sup>/Эсек в YFeO<sub>3</sub>).

Заметим, что второе слагаемое в левой части уравнения (1) может быть записано следующим образом:  $\partial\tilde{R}_1/\partial\dot{q}$ , тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial\dot{q}} = 2M_s H. \quad (3)$$

Это позволяет обобщить уравнения (1, 2), учитывая более реалистичные зависимости диссипативной функции Рэлея, что понадобится нам в дальнейшем. Известно [2–6], что при сверхзвуковом движении доменной границы имеет место значительное усиление ее магнитоупругого взаимодействия с фононами. Это проявляется, в частности, в сильном увеличении амплитуды упругой волны, сопровождающей движущуюся границу, и в возникновении участков отрицательной дифференциальной подвижности на кривой  $v(h)$  (рис. 1(а)). В эксперименте это проявляется в виде “горизонтальных полочек” на кривой  $v(h)$  и скачков скорости доменной границы в процессе движения (подробнее, см. [2–6]).

**2.** Перейдем к анализу уравнения (1). Подставляя

$$q = cvt + q_1, \quad \dot{q} = cv + \dot{q}_1, \quad (4)$$

где  $\dot{q}_1 \ll cv$ , в уравнение (1) и линеаризуя его, получим

$$m_\perp \partial_t^2 q_1 + \frac{m_\perp}{\tau} a(v) \dot{q}_1 - \sigma \partial_x^2 q_1 + \kappa^2 q_1 = \frac{2\pi\chi_\perp H_D}{\gamma} \dot{x}_0 \delta(x - x_0), \quad (5)$$

где  $a(v) = \beta^{-3} \frac{\partial h}{\partial v}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ ,  $m_\perp = \frac{m_0}{(\sqrt{1-v^2})^3}$ ,  $\sigma = m_0 c^2 \beta$ ,  $\kappa^2 = 2M_s H'$ .

Значение  $a = 1$  соответствует случаю, когда магнитоупругое взаимодействие и связанные с ним аномалии не принимаются во внимание.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q_1(x, t) = q_0 \begin{cases} \exp \lambda_-(x - x_0), & x > x_0, \\ \exp \lambda_+(x - x_0), & x < x_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$q_0 = \frac{G \dot{x}_0}{2\sigma_0 \beta^3 (1 - u^2 - v^2) \lambda_0}, \quad (7)$$

$$\lambda_\pm = \pm \lambda_0 - \frac{\dot{x}_0 a(v)}{2\tau c^2 (1 - u^2 - v^2)}, \quad (8)$$

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{(1 - u^2 - v^2)\beta^{-3} + \xi(v)u^2}}{l_H(1 - u^2 - v^2)}, \quad (9)$$

$$u = \dot{x}_0/c, \quad F_M = G\dot{x}_0, \quad G = \frac{2\pi\chi_\perp H_D}{\gamma}, \quad \xi(v) = \left(\frac{l_H a(v)}{2\tau}\right)^2.$$

Уравнение (6) описывает волну прогиба доменной границы (рис. 1 из [1]), в которой прогиб обусловлен  $y$ -компонентой силы Магнуса  $F_M^y$ , действующей со стороны движущегося вихря на доменную границу. Само же движение вихря создается другой компонентой силы Магнуса:  $F_M^x$ , пропорциональной скорости доменной границы.

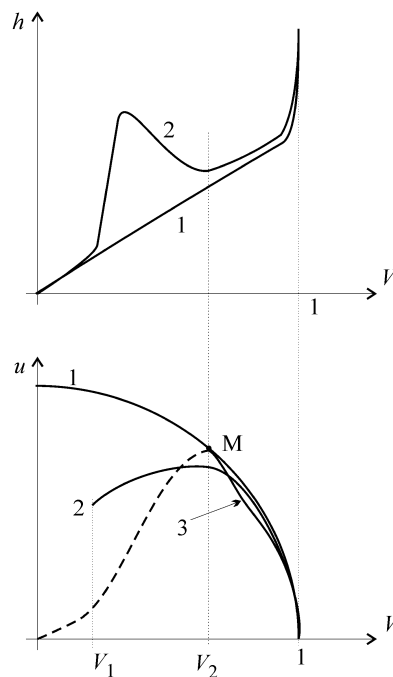


Рис. 1: (а) Схематическая зависимость скорости доменной границы от магнитного поля, определяемая уравнением (2), без учета (кривая 1) и с учетом (кривая 2) магнитоупругого взаимодействия и сверхзвуковых аномалий. В интервале  $v_1 < v < v_2$  плоская доменная граница неустойчива. (б) Схематическая зависимость скорости вихря  $u$  от скорости доменной границы  $v$ . Кривая (1) определяется уравнением (15)  $u^2 + v^2 = 1$ , кривая (2) – уравнением (16), не учитывающем сверхзвуковые аномалии. Кривая (3) учитывает последние. В интервале  $v_2 < v < 1$  кривая (3) определяется уравнением (17) при значении  $u_{max} = \sqrt{1 - v_2^2}$ ; пунктиром качественно изображено продолжение этой кривой для области  $v < v_2$ , где плоская доменная граница из-за сверхзвуковых аномалий неустойчива.

**3.** Чтобы найти зависимость скорости вихря  $u$  от скорости доменной границы  $v$ , что является центральной нашей задачей, подставим найденное решение (6) в лагранжиан и диссипативную функцию Рэлея (формулы (31), (32) из [1]) и проинтегрируем их по длине доменной границы (фактически по площади). В результате получим эффективные  $L_{\text{eff}}(\dot{x}_0, x_0)$ ,  $R_{1\text{eff}}(\dot{x}_0, x_0)$ . Ограничиваясь задачей о стационарном движении вихря, нужно положить в соответствующем уравнении Эйлера–Лагранжа  $\partial_t \dot{x}_0 = 0$ , тогда

$$-\frac{\delta L_{\text{eff}}}{\delta x_0} = -\frac{\partial(R_{1\text{eff}} + R_2)}{\partial \dot{x}_0}, \quad (10)$$

где  $R_2$  определено приближенно формулой (29) из [1], а левая часть этого уравнения равна  $x$ -компоненте силы Магнуса  $F_M^x$  (см. (18, 22) из [1]).

При анализе довольно сложного и громоздкого уравнения (10) используем вышеприведенное замечание о зависимости диссипативных вкладов  $R_1$  и  $R_2$  от  $\dot{q}$ ,  $\dot{x}_0$ .

При  $\dot{x}_0 \ll c$ ,  $\dot{q} \ll c$  превалирует вклад от  $R_2$ . В этой области скоростей уравнение (10) принимает вид:

$$G\dot{q} = \frac{m_0 \Delta^2 \dot{x}_0}{\tau},$$

откуда следует:

$$\dot{x}_0 = \frac{G\tau}{m_0 \Delta^2} \dot{q}. \quad (11)$$

При  $\dot{q} \lesssim c$  в уравнении (10) достаточно учесть вклад от  $R_1$ .

Сила трения, определяемая этим вкладом, равна:

$$F_{vs} = \frac{d}{d_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 R}{d\dot{q}^2} q_1^2 \right) dx. \quad (12)$$

Используя соотношения (следующие из (3, 6–9)):

$$\frac{d^2 R}{\partial \dot{q}^2} = \frac{m_0}{\tau} \frac{dh}{dv}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}_1^2 dx = q_0^2 c^2 \lambda_0 u^2 \quad (13)$$

и подставляя их в (42), получим следующее уравнение для определения  $u(v)$ :

$$v = \sqrt{\xi} \frac{Gc}{4\sigma_0} \beta^{-3} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u^4}{(1 - u^2 - v^2) \sqrt{(1 - u^2 - v^2) \beta^{-3} + \xi u^2}} \right). \quad (14)$$

**4.** Рассмотрим несколько частных случаев, когда следующая из (14) зависимость  $u(v)$  может быть представлена аналитическими формулами.

4.1. Диссипация равна 0, т.е.  $\alpha = 0$ , а следовательно, и  $a(v) = 0$ . Как легко видеть, из (14) следует, что при  $a \rightarrow 0$

$$1 - u^2 - v^2 \rightarrow 0 \quad (15)$$

(см. кривую 1 на рис. 1(b)). Такая зависимость скорости доменной границы и возмущений, распространяющихся вдоль нее, является прямым следствием квазирелятивистской динамики доменной границы [7].

4.2. Пусть  $a = 1$ ,  $\xi \gg 1$ . Первое из этих неравенств означает, что мы пренебрегаем сверхзвуковыми магнитоупругими аномалиями в динамике вихря; второе требует, чтобы частота собственных колебаний доменной границы  $\omega_0 = \sqrt{k^2/m_0}$  была меньше частоты релаксации  $1/\tau$ , что обычно выполняется с большим запасом. В этом случае:

$$u = \sqrt{(1-v^2) \frac{2v + 3p - \sqrt{9p^2 + 8pv}}{2(v+p)}}, \quad (16)$$

где  $p = Gc/4\sigma_0\beta^3$ . При  $v \sim 1$  из (16) следует  $u \approx \sqrt{1-v^2}$ , т.е. (16) плавно переходит в (15). При  $3p/\xi \ll v \ll 3p$  из (16) следует  $u = \sqrt{(1-v^2)(v/3p)}$ , при  $v \rightarrow 0$  эту зависимость следует сплести с формулой (11) из [1] (см. рис. 1(b)).

4.3. Сравнение (16) с экспериментальными данными [8–12] показывает, что практически во всем диапазоне скоростей она систематически лежит выше экспериментальных значений, за исключением небольшой области вблизи точки максимума, где она ниже последних. Эти особенности могут быть объяснены, по крайней мере, качественно, если учесть сверхзвуковые аномалии в динамике доменной границы и вихря.

На рис. 1(a) показана схематически кривая  $v(h)$ , следующая из уравнения (3) при учете магнитоупругого взаимодействия (более детальные кривые приведены в [6]). Область значений  $v$  можно разделить на три подобласти: а)  $v < v_1$ , б)  $v_1 < v < v_2$ , в)  $v_2 < v < 1$  ( $v_1 \lesssim s_t/c$ ,  $v_2 \gtrsim s_l/c$ , где  $s_t$ ,  $s_l$  – скорости поперечного и продольного звука, соответственно). В областях а) и в) дифференциальная подвижность положительна  $\frac{\partial v}{\partial h} > 0$  и она отрицательна в области в) <sup>2</sup>. Отсюда следует, что в областях а), в) плоская доменная граница устойчива относительно изгибных возмущений, а в области б) неустойчива. В области а) прогиб доменной границы под действием силы Магнуса мал, поэтому зависимость  $u(v)$  здесь можно аппроксимировать формулой (11) с постепенным переходом с ростом скорости  $v$  к формуле (16).

В области в) из уравнения (14) можно получить следующую зависимость:

$$u = \sqrt{(1-v^2)(1 - b(1-v^2)^{\frac{3}{10}}(v/v_2 - 1)^{\frac{2}{5}})}, \quad (17)$$

<sup>2</sup>Более строгий анализ показывает, что структура этой области является более сложной. В ней возможны несколько чередующихся интервалов скоростей, где дифференциальная подвижность имеет разные знаки и соответственно экспериментально наблюдаемая кривая зависимости скорости доменной границы от магнитного поля имеет несколько “горизонтальных полок” [2, 6]. Однако для выяснения качественной стороны дела эти детали не имеют принципиального значения.

где  $b = (3Gc/4\sigma_0)\sqrt{\xi}$ . Из (17) следует, что в точке  $v_2$  функция  $u(v)$  достигает максимума, при этом максимальное значение скорости вихря определяется уравнением  $u_{\max} = \sqrt{1 - v^2}$ .

При переходе через максимум, т.е. оказавшись в области  $b$ ), мы не можем использовать, в силу неустойчивости плоской доменной границы, уравнение (14) для описания зависимости  $u(v)$ . Можно лишь ожидать, что в этой области сильно возрастает сила трения вихря и потому при отходе от максимума быстро уменьшается его скорость (см. пунктирную кривую на рис. 1(b)). Как уже отмечено выше, реальные зависимости  $v(h)$  в слабых ферромагнетиках являются более сложными, чем изображенная на рис. 1(a). В частности, они могут образовывать несколько областей с чередующимися отрицательной и положительной подвижностью. Из этого следует, что в области  $v_1 < v < v_2$  зависимость скорости вихря от  $v$  может быть немонотонной, могут возникнуть дополнительные “пики” на границах перехода между этими чередующимися участками. Этот интересный вопрос еще ждет экспериментального исследования.

Таким образом, в данной и предыдущей работах исследован вопрос о силе Магнуса в слабых ферромагнетиках, действующей на магнитные вихри, находящиеся в движущихся доменных границах. Получена общая формула для силы Магнуса в слабых ферромагнетиках. Отметим, что вплоть до недавнего времени в данной научной области существовала остро противоречивая ситуация. С одной стороны, в ряде теоретических работ (см. [2] и цитированную там литературу) утверждалось, что в слабых ферромагнетиках вектор гирации и сила Магнуса обращаются в 0, с другой стороны, эксперимент [8–12] демонстрировал наличие гирации в поведении вихрей. Полученная формула для силы Магнуса разрешает это противоречие.

Конкретный расчет силы Магнуса в ромбических слабых ферромагнетиках проведен методом, который дает возможность ее вычисления без учета внутренней структуры вихря в доменной границе. Эта задача является хорошим примером, иллюстрирующим весьма эффективный метод последовательного редуцирования исходного лагранжиана и функции Рэля многоподрешеточного магнетика к функциям Лагранжа и Рэля, зависящим только от координат центров тяжести рассматриваемого 2D солитона. Эта процедура весьма близка к методологии многомасштабного моделирования. Показано, что для большинства типов доменных границ сила Магнуса отлична от нуля и определяется средней намагниченностью подрешеток, константами взаимодействия Дзялошинского и обменного взаимодействия между подрешетками. Выведены обобщенные вы-

ражения для эффективных функций Лагранжа и Рэлея в слабых ферромагнетиках с учетом вихревой структуры последних.

Исследован вопрос о стационарном движении магнитного вихря в движущейся доменной границе под действием силы Магнуса в слабых ферромагнетиках. Анализируется динамический прогиб доменной границы при наличии в ней движущегося вихря. Динамический прогиб кардинально влияет на динамику вихря, что проявляется в сильной нелинейной зависимости силы торможения вихря от скоростей самого вихря и доменной границы. Большое влияние на динамику вихря оказывают также квазирелятивистские зависимости массы и энергии доменной границы, характерные для спиновой динамики слабых ферромагнетиков. Получены формулы, описывающие зависимости скорости вихря от скорости доменной границы. Проведенный анализ показывает принципиальное согласие теории и эксперимента.

Работа поддержана проектами РФФИ (09-02-01423, 10-02-90475, 10-02-01162).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] А. К. Звездин, К. А. Звездин, Краткие сообщения по физике ФИАН, **37**(8), 22 (2010).
- [2] V. G. Baryaktar, M. V. Chetkin, B. A. Ivanov, S. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons* (Springer, Berlin, 1994).
- [3] М. В. Четкин, И. В. Парыгина, В. Б. Смирнов и др., Письма ЖЭТФ **49**(3), 174 (1989).
- [4] M. V. Chetkin, V. B. Smirnov, I. V. Parigina, A. K. Zvezdin, Phys. Lett. A **140**, 428 (1989).
- [5] А. К. Звездин, А. Ф. Попков, ФТТ **21**, 1334 (1979).
- [6] А. К. Звездин, А. А. Мухин, ЖЭТФ **75**(2), 306 (1992).
- [7] А. К. Звездин, А. Ф. Попков, Письма в ЖЭТФ **39**(8), 348 (1984).
- [8] М. В. Четкин, Ю. Н. Курбатова, В. Н. Филатов, Письма в ЖЭТФ **65**, 760 (1997).
- [9] М. В. Четкин, Ю. Н. Курбатова, Т. Б. Шапаева, О. А. Борщеговский, Письма в ЖЭТФ **79**, 527 (2004).
- [10] M. V. Chetkin, Yu. N. Kurbatova, T. B. Shapaeva, O. A. Borschegovsky, Phys. Lett. A **337**, 235 (2005).
- [11] М. В. Четкин, Ю. Н. Курбатова, Т. Б. Шапаева, О. А. Борщеговский, ЖЭТФ **130**, 181 (2006).
- [12] М. В. Четкин, Ю. Н. Курбатова, Т. Б. Шапаева, О. А. Борщеговский, Письма в ЖЭТФ **85**, 232 (2007).

Поступила в редакцию 13 ноября 2009 г.